

# Szacowanie niepewności pomiarów współrzędnościowych odchyłek równoległości osi metodą analizy wrażliwości

## Evaluation of coordinate measurement uncertainty of parallelism of axes by means of sensitivity analysis method

WOJCIECH PŁOWUCHA\*

DOI: <https://doi.org/10.17814/mechanik.2018.12.203>

Na przykładzie pomiaru trzech wariantów odchyłki równoległości osi otworów korbowodu przedstawiono jedną z wielu możliwości zastosowania nowej metody szacowania niepewności pomiarów współrzędnościowych. Jest to kontynuacja artykułu „Szacowanie niepewności pomiarów współrzędnościowych metodą analizy wrażliwości – podstawy teoretyczne” (*Mechanik* nr 11, 2018). W pierwszym wariantcie pole tolerancji ma postać walca, w pozostałych dwóch wariantach ma postać pary płaszczyzn. W opisanych przykładach budżety niepewności zawierają sześć lub dziewięć czynników wejściowych, ale we wszystkich przypadkach, kiedy osie mierzonych otworów są równoległe do jednej z osi maszyny, tylko dwa czynniki wejściowe mają wpływ na niepewność pomiaru odchyłki równoległości.

**SŁOWA KLUCZOWE:** niepewność pomiaru, analiza wrażliwości, pomiary współrzędnościowe

*The examples of measurement of three variants of the parallelism of the connecting-rod center axes the theoretical basis of a new method for estimating the uncertainty of coordinate measurements. This is a continuation of the article “Estimation of coordinate measurement uncertainty – theoretical fundamentals” (Mechanik 11, 2018). In the first variant, this tolerance field is in the form of a cylinder, in the other two it has the form of a pair of planes. In the examples presented, uncertainty budgets contain six or nine input factors. In all cases, when the axes of the measured holes are parallel to one of the machine axes, only two input factors affect the uncertainty of the measurement of parallelism deviation.*

**KEYWORDS:** measurement uncertainty, sensitivity analysis, coordinate measurements

Podstawy i istotne założenia nowej, opracowanej w ATH metody szacowania niepewności pomiarów współrzędnościowych przedstawiono w publikacjach [1, 2]. W [1] podano również przykłady niepewności pomiaru promienia okręgu i promienia łuku okręgu. Występujące w tytule określenie „metoda analizy wrażliwości” zaczerpnięto ze specyfikacji technicznej ISO/TS 15530-1:2013 [3], która oprócz tej metody wyróżnia jeszcze metodę z użyciem przedmiotu wzorcowego [4] i symulacyjną.

Zastosowano podejście bezpośrednio wynikające z zaleceń przewodnika GUM [5]: punktem wyjścia jest model pomiaru w postaci wzoru na mierzoną charakterystykę, a współczynniki wrażliwości to wartości pochodnych cząstkowych obliczone z modelu pomiaru. Mimo względnie prostej postaci wzorów na poszczególne charakterystyki geometryczne mierzonych przedmiotów, wzory na pochodne cząstkowe są dość złożone i konieczne jest wspomaganie obliczeń. Autor posługuje się oprogramowaniem Maplesoft Maple 2018. Arkusz kalkulacyjny zawierający obliczenia można znaleźć na stronie Labora-

torium Metrologii ATH w zakładce „Do pobrania” ([www.lm.ath.bielsko.pl](http://www.lm.ath.bielsko.pl)).

W niniejszej publikacji zaprezentowano trzy przykłady szacowania niepewności pomiaru odchyłki równoległości osi korbowodu, odpowiadające trzem sposobom tolerowania występującym w ISO 1101 [6]. Są to następujące przypadki:

- walcowe pole tolerancji,
- tolerancja w płaszczyźnie wspólnej,
- tolerancja w płaszczyźnie normalnej do wspólnej.

Dwa z nich szczegółowo przeanalizowano. Dla trzeciego, najbardziej złożonego, podano jedynie model i wyniki. W przykładzie zawarto wszystkie szczegóły umożliwiające przeliczenie go dla innych danych – zarówno wymiarów przedmiotu, jak i dokładności współrzędnościowej maszyny pomiarowej (CMM). Podobnie jak w poprzednim artykule przyjęto, że niepewność standardowa pomiaru różnic współrzędnych jest obliczana ze wzoru:

$$u_{xi} = E_{L,MPE}/3 \quad (1)$$

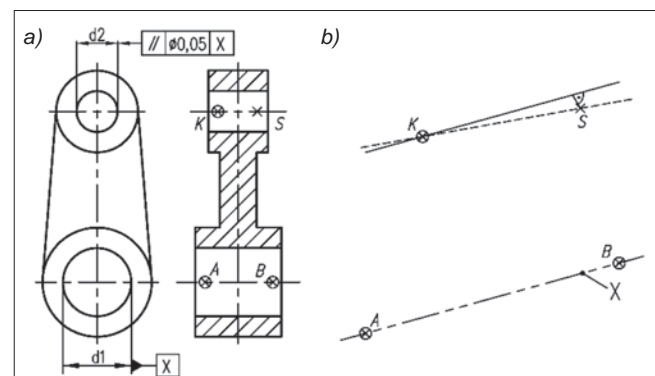
a największy dopuszczalny błąd pomiaru długości użytej maszyny jest wyrażony wzorem:

$$E_{L,MPE} = (2 + 0,004L) \mu\text{m} \quad (2)$$

w którym:  $L$  – mierzona długość w mm.

### Odchyłka równoległości osi – walcowe pole tolerancji

Na rys. 1 pokazano przykład specyfikacji tolerancji i modelowania pomiaru odchyłki równoległości osi dla pola tolerancji w kształcie walca.



Rys. 1. Odchyłka równoległości osi dla przypadku walcowego pola tolerancji: a) przykładowy rysunek z punktami charakterystycznymi, b) model do oceny niepewności

Pole tolerancji równoległości osi według normy ISO 1101 stanowi walec o średnicy równej wartości tolerancji. Odchyłka równoległości osi to najmniejsza średnica walca, którego oś jest równoległa do osi  $AB$  i który obejmuje wszystkie punkty osi elementu tolerowanego. W przedstawionym modelu są to punkty  $K$  i  $S$ , czyli odchyłka jest

\* Dr inż. Wojciech Płowucha ([wplowucha@ath.bielsko.pl](mailto:wplowucha@ath.bielsko.pl)) – Laboratorium Metrologii, Akademia Techniczno-Humanistyczna w Bielsku-Białej

równa odległości  $l$  punktu  $S$  od prostej zawierającej punkt  $K$ . Niepewność pomiaru odchyłki prostoliniowości jest równa niepewności pomiaru  $u_l$  odległości  $l$ .

Wzór ogólny na odległość  $l$  punktu  $S$  od prostej  $p$  zdefiniowanej przez punkt  $P$  i jednostkowy wektor  $v$  ma postać:

$$l(S, p) = |(P - S) \times v| \quad (3)$$

W modelu pomiaru prosta  $p$  jest reprezentowana przez jeden punkt i jest równoległa do prostej zdefiniowanej przez dwa punkty.

W takim przypadku punkt  $K$  będzie wykorzystany jako punkt  $P$  we wzorze (3), a jednostkowy wektor  $v$  będzie wyznaczony jako:

$$v = \frac{B - A}{|B - A|} \quad (4)$$

Ostatecznie otrzymuje się model pomiaru w postaci:

$$l = \left| KS \times \frac{AB}{|AB|} \right| \quad (5)$$

gdzie:  $AB = [ab_1, ab_2, ab_3]$ ,  $KS = [ks_1, ks_2, ks_3]$ .

Odległość  $l$  jest funkcją sześciu różnic współrzędnych (składowych wektorów), tak więc złożona niepewność pomiaru  $u_l$  jest sumą geometryczną sześciu elementów:

$$u_l = \sqrt{\sum_{i=1}^6 \left( \frac{\partial l}{\partial x_i} u_{xi} \right)^2} \quad (6)$$

Warto zwrócić uwagę, że w modelu nie występuje odległość między elementem tolerowanym i bazą.

W zapisie skalarnym wzór na odległość  $l$  (model pomiaru) ma postać:

$$l = \frac{L}{M} \quad (7)$$

gdzie:

$$L = \sqrt{L_1^2 + L_2^2 + L_3^2} \quad (8)$$

$$M = ab_1^2 + ab_2^2 + ab_3^2 \quad (9)$$

$$L_1 = ks_2 ab_3 - ks_3 ab_2 \quad (10)$$

$$L_2 = ks_3 ab_1 - ks_1 ab_3 \quad (11)$$

$$L_3 = ks_1 ab_2 - ks_2 ab_1 \quad (12)$$

Potrzebne do wzoru (6) pochodne cząstkowe są wyrażone następującymi wzorami:

$$\frac{\partial l}{\partial ab_1} = \frac{(L_2 \cdot ks_3 - L_3 \cdot ks_2)}{M \cdot L} - \frac{2ab_1 \cdot L}{M^2} \quad (13)$$

$$\frac{\partial l}{\partial ab_2} = \frac{(-L_2 \cdot ks_3 + L_3 \cdot ks_1)}{M \cdot L} - \frac{2ab_2 \cdot L}{M^2} \quad (14)$$

$$\frac{\partial l}{\partial ab_3} = \frac{(L_1 \cdot ks_2 + L_2 \cdot ks_1)}{M \cdot L} - \frac{2ab_3 \cdot L}{M^2} \quad (15)$$

$$\frac{\partial l}{\partial as_1} = \frac{(-L_2 \cdot ab_3 + L_3 \cdot ab_2)}{M \cdot L} \quad (16)$$

$$\frac{\partial l}{\partial as_2} = \frac{(L_1 \cdot ab_3 - L_3 \cdot ab_1)}{M \cdot L} \quad (17)$$

$$\frac{\partial l}{\partial as_3} = \frac{(-L_1 \cdot ab_2 - L_2 \cdot ab_1)}{M \cdot L} \quad (18)$$

Odpowiednie niepewności składowe  $u_{xi}$  to:  $u_{as1}$ ,  $u_{as2}$ ,  $u_{as3}$ ,  $u_{ab1}$ ,  $u_{ab2}$ ,  $u_{ab3}$ .

Aby ustalić, od czego zależą składowe niepewności pomiaru, analizy zostaną przedstawione na przykładach liczbowych.

Przeanalizowano przykład dla korbowodu o wymiarach: szerokość stopy – 25 mm, szerokości główki – 20 mm, odległości osi – 120 mm. Rozmieszczenie punktów charakterystycznych przyjęto w następujący sposób:  $A(5, 5, 5)$ ,  $B(25, 5, 5)$ ,  $K(7,5; 125; 5)$ . Odpowiada to zorientowaniu korbowodu równoległe do płaszczyzny  $xy$ .

Budżet niepewności dla położenia punktu  $S(22,5; 125; 10,01)$  odpowiadającego długości elementu tolerowanego przedstawiono w tabl. I.

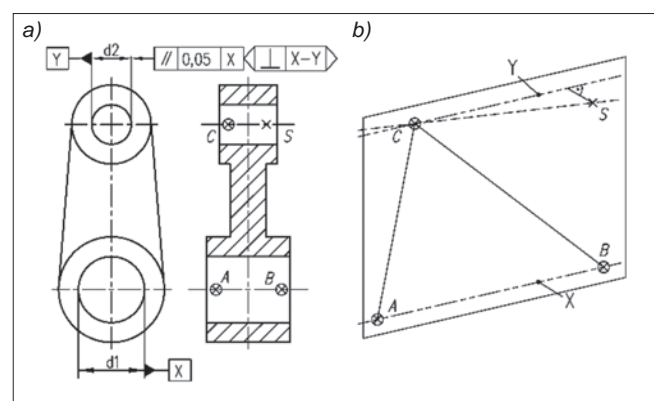
**TABLICA I. Budżet niepewności dla pomiaru odległości punktu od prostej (rys. 1a) dla  $S(22,5; 125; 10,01)$ .**

Składnik	$x_i$ , mm	$\frac{\partial l}{\partial x_i}$	$u_{xi}$ , $\mu\text{m}$	$\frac{\partial l}{\partial x_i} u_{xi}$ , $\mu\text{m}$
$ks_1$	15	0	0,69	0
$ks_2$	0	0	0,67	0
$ks_3$	0,01	1	0,67	0,67
$ab_1$	20	0	0,69	0
$ab_2$	0	0	0,67	0
$ab_3$	0	-0,75	0,67	0,5
			$u =$	0,84

W budżecie niepewności występują dwa składniki niezerowe. Jeden ze składników, z wagą 1, odpowiada odległości punktu  $S$  od osi tolerowanej ( $ks_3$ ). Składnik niepewności odpowiadający różnicy współrzędnych  $ab_3$  występuje w budżecie z wagą 0,75, co odpowiada proporcji długości elementu tolerowanego ( $ks_1 = 15$  mm) do długości elementu bazowego ( $ab_1 = 20$  mm). Niepewność złożona wynosi 0,84  $\mu\text{m}$ .

### Odchyłka równoległości osi w płaszczyźnie normalnej do wspólnej

Na rys. 2 pokazano model pomiaru odchyłki równoległości osi w płaszczyźnie normalnej do wspólnej.



Rys. 2. Odchyłka równoległości osi w płaszczyźnie normalnej do wspólnej: a) przykładowy rysunek z punktami charakterystycznymi, b) model do oceny niepewności

Pole tolerancji stanowi para płaszczyzn równoległych do osi stanowiącej bazę i obejmujących oś tolerowaną. Odchyłka równoległości to najmniejsza odległość pary płaszczyzn, o których mowa w definicji tolerancji równoległości, obejmujących rzeczywiste punkty osi tolerowanej, czyli odległość  $l$  punktu  $S$  od płaszczyzny  $ABC$ .

Niepewność pomiaru odchyłki równoległości osi w płaszczyźnie prostopadłej do ich płaszczyzny wspólnej jest równa wartości niepewności pomiaru  $u_l$  odległości  $l$ .

Wzór ogólny na odległość  $l$  punktu  $S$  od płaszczyzny  $p$ , zdefiniowanej przez punkt  $P$  i jednostkowy wektor normalny  $v$ , ma postać:

$$l(S, p) = |(P - S) \cdot v| \quad (19)$$

W poniższym przykładzie płaszczyzna  $p$  jest reprezentowana przez trzy punkty. Jeżeli płaszczyzna  $p$  jest reprezentowana przez punkty  $A$ ,  $B$  i  $C$ , to jednostkowy wektor normalny może być zdefiniowany jako (rys. 2):

$$v = \frac{AB \times AC}{|AB \times AC|} \quad (20)$$

Ostatecznie otrzymuje się model pomiaru w postaci:

$$l(AS, AB, AC) = \left| AS \cdot \frac{AB \times AC}{|AB \times AC|} \right| \quad (21)$$

Po rozwinięciu wzór na odległość  $l$  (model pomiaru) ma postać:

$$l = \frac{as_1L_1 + as_2L_2 + as_3L_3}{M} \quad (22)$$

gdzie:

$$L_1 = ab_2ac_3 - ab_3ac_2 \quad (23)$$

$$L_2 = ab_3ac_1 - ab_1ac_3 \quad (24)$$

$$L_3 = ab_1ac_2 - ab_2ac_1 \quad (25)$$

$$M = \sqrt{L_1^2 + L_2^2 + L_3^2} \quad (26)$$

Odległość  $l$  jest tutaj funkcją dziewięciu różnic współrzędnych (składowych wektorów  $AB$ ,  $AC$  i  $AS$ ), tak więc złożona niepewność pomiaru  $u_l$  jest sumą geometryczną dziewięciu elementów:

$$u_l = \sqrt{\sum_{i=1}^9 \left( \frac{\partial l}{\partial x_i} u_{x_i} \right)^2} \quad (27)$$

Występujące we wzorze pochodne są wagami (współczynnikami wrażliwości), z którymi niepewności pomiaru poszczególnych odległości wpływają na niepewność pomiaru mierzonej charakterystyki. Odpowiednie pochodne  $\frac{\partial l}{\partial x_i}$  wyraża się wzorami:

$$\frac{\partial l}{\partial as_1} = \frac{L_1}{M} \quad (28)$$

$$\frac{\partial l}{\partial as_2} = \frac{L_2}{M} \quad (29)$$

$$\frac{\partial l}{\partial as_3} = \frac{L_3}{M} \quad (30)$$

$$\frac{\partial l}{\partial ab_1} = \frac{(-as_1L_1 - as_2L_2 - as_3L_3)(ac_3L_2 + ac_2L_3)}{M^3} + \frac{as_3ac_2 - as_2ac_3}{M} \quad (31)$$

$$\frac{\partial l}{\partial ab_2} = \frac{(-as_1L_1 - as_2L_2 - as_3L_3)(ac_3L_1 - ac_1L_3)}{M^3} + \frac{as_1ac_3 - as_3ac_1}{M} \quad (32)$$

$$\frac{\partial l}{\partial ab_3} = \frac{(-as_1L_1 - as_2L_2 - as_3L_3)(ac_1L_2 - ac_2L_1)}{M^3} + \frac{as_2ac_1 - as_1ac_2}{M} \quad (33)$$

$$\frac{\partial l}{\partial ac_1} = \frac{(-as_1L_1 - as_2L_2 - as_3L_3)(ab_3L_2 - ab_2L_3)}{M^3} + \frac{as_2ab_3 - as_3ab_2}{M} \quad (34)$$

$$\frac{\partial l}{\partial ac_2} = \frac{(-as_1L_1 - as_2L_2 - as_3L_3)(ab_1L_3 - ab_3L_1)}{M^3} + \frac{as_3ab_1 - as_1ab_3}{M} \quad (35)$$

$$\frac{\partial l}{\partial ac_3} = \frac{(-as_1L_1 - as_2L_2 - as_3L_3)(ab_2L_1 - ab_1L_2)}{M^3} + \frac{as_1ab_2 - as_2ab_1}{M} \quad (36)$$

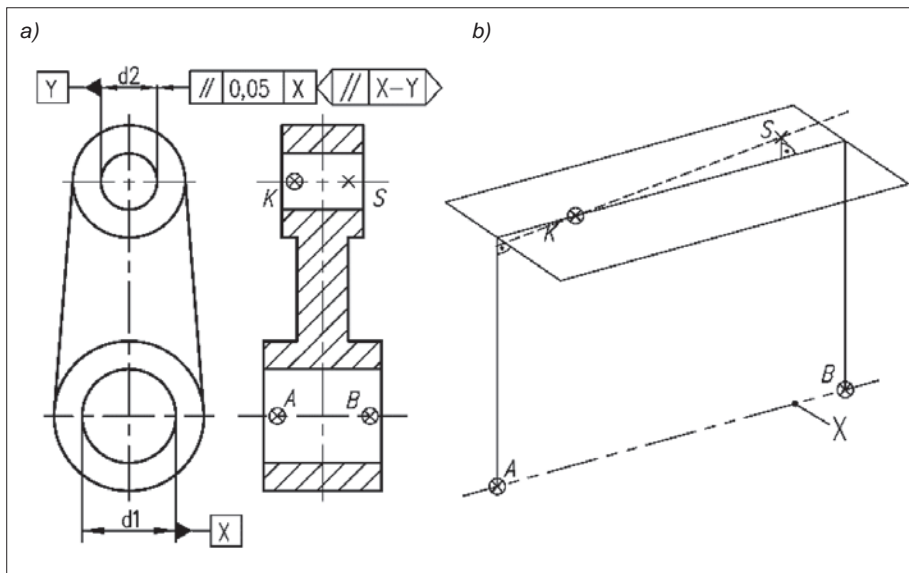
Odpowiednie niepewności składowe  $u_{x_i}$  to:  $u_{as1}$ ,  $u_{as2}$ ,  $u_{as3}$ ,  $u_{ab1}$ ,  $u_{ab2}$ ,  $u_{ab3}$ ,  $u_{ac1}$ ,  $u_{ac2}$ ,  $u_{ac3}$ .

Przeanalizowano przykład dla przedmiotu o wymiarach i ustawieniu względem układu współrzędnych jak w poprzednim rozdziale:  $A(5, 5, 5)$ ,  $B(25, 5, 5)$ ,  $C(7, 5, 125; 5)$ .

Budżet niepewności przedstawiono w tabl. II. Dwa składniki mają w nim wartości niezerowe. Pierwszy niezerowy składnik, dla  $cs_3$  z wagą 1, odpowiada odległości punktu  $S$  od płaszczyzny zdefiniowanej przez oś bazową i punkt osi tolerowanej (odchyłka równoległości osi). Drugi niezerowy składnik, dla  $ab_3$  z wagą 0,75, odpowiada proporcji szerokości elementu tolerowanego ( $cs_1 = 15$  mm) do szerokości bazy ( $ab_1 = 20$  mm).

TABLICA II. Budżet niepewności dla pomiaru odległości punktu od prostej (rys. 2a) dla punktu  $S(22,5; 125; 10,01)$

Składnik	$x_i$ , mm	$\frac{\partial l}{\partial x_i}$	$u_{x_i}$ , $\mu\text{m}$	$\frac{\partial l}{\partial x_i} u_{x_i}$ , $\mu\text{m}$
$cs_1$	15	0	0,69	0
$cs_2$	0	0	0,67	0
$cs_3$	0,01	1	0,67	0,67
$ab_1$	20	0	0,69	0
$ab_2$	0	0	0,67	0
$ab_3$	0	-0,75	0,67	0,5
$ac_1$	2,5	0	0,67	0
$ac_2$	120	0	0,83	0
$ac_3$	0	0	0,67	0
			$u =$	0,84



Rys. 3. Odchyłka równoległości osi w płaszczyźnie wspólnej: a) przykładowy rysunek z punktami charakterystycznymi, b) model do oceny niepewności

### Odchyłka równoległości osi w płaszczyźnie wspólnej

Na rys. 3 pokazano model pomiaru odchyłki równoległości osi w płaszczyźnie wspólnej.

Pole tolerancji stanowi para płaszczyzn równoległych do osi stanowiącej bazę i prostopadłych do płaszczyzny wspólnej obu osi. Odchyłka równoległości to najmniejsza odległość  $l$  pary płaszczyzn, o których mowa w definicji tolerancji równoległości, obejmujących rzeczywiste punkty osi tolerowanej.

Niepewność pomiaru odchyłki równoległości osi w płaszczyźnie wspólnej jest równa wartości niepewności pomiaru  $u_l$  odległości punktu od płaszczyzny.

Wzór ogólny na odległość  $l$  punktu  $S$  od płaszczyzny  $p$ , zdefiniowanej przez punkt  $P$  i jednostkowy wektor normalny  $v$ , podano wcześniej (19). W niniejszym modelu płaszczyzna  $p$  zawiera punkt  $K$ , jest równoległa do prostej zdefiniowanej za pomocą punktów  $A$  i  $B$  oraz prostopadła do płaszczyzny  $ABK$  (rys. 3).

Punktem  $P$  we wzorze (19) jest punkt  $K$ . Wektor normalny może być zdefiniowany jako iloczyn wektorowy wektora normalnego do płaszczyzny  $ABK$  i wektora równoległego do prostej  $AB$ . Jednostkowy wektor normalny płaszczyzny  $ABK$  może być zdefiniowany (rys. 3):

$$v = \frac{(AB \times AK) \times AB}{|(AB \times AK) \times AB|} \quad (37)$$

TABLICA III. Budżet niepewności dla pomiaru odległości punktu od prostej (rys. 3a) dla punktu  $S(22,5; 10; 125)$

Składnik	$x_i$ , mm	$\frac{\partial l}{\partial x_i}$	$u_{x_i}$ , $\mu\text{m}$	$\frac{\partial l}{\partial x_i} u_{x_i}$ , $\mu\text{m}$
$ab_1$	-20	0	0,69	0
$ab_2$	0	0	0,67	0
$ab_3$	0	0,75	0,67	0,5
$ak_1$	-2,5	0	0,67	0
$ak_2$	0	0	0,67	0
$ak_3$	-120	0	0,83	0
$ks_1$	-15	0	0,69	0
$ks_2$	0	0	0,67	0
$ks_3$	0	-1	0,67	-0,67
			$u =$	0,84

Ostatecznie model pomiaru ma postać:

$$l(AB, AK, KS) = \left| KS \cdot \frac{(AB \times AK) \times AB}{|(AB \times AK) \times AB|} \right| \quad (38)$$

Przeanalizowano przykład dla przedmiotu o wymiarach i ustawieniu względem układu współrzędnych jak w poprzednim rozdziale  $A(5,5,5)$ ,  $B(25,5,5)$ ,  $K(7,5;125;5)$ . Budżet niepewności przedstawiono w tabl. III.

W przedstawionym w tabl. III budżecie niepewności dwa składniki mają wartości niezerowe. Pierwszy niezerowy składnik, dla składowej  $ks_3$  z wagą 1, odpowiada odległości punktu  $S$  od płaszczyzny zdefiniowanej przez oś bazową i punkt osi tolerowanej (odchyłka równoległości osi). Drugi niezerowy składnik, dla  $ab_3$  z wagą 0,75, odpowiada proporcji szerokości elementu tolerowanego ( $ks_1 = 15$  mm) i szerokości bazy ( $ab_1 = 20$  mm).

### Podsumowanie

Zaprezentowane modele pomiaru oddają istotę pomiarów współrzędnościowych odchyłek geometrycznych dzięki temu, że wyrażają wielkość wynikową (wartość odchyłki) w funkcji wielkości mierzonych bezpośrednio (różnic współrzędnych, czyli wartości przemieszczeń ze spólów maszyny).

W trzech przedstawionych przypadkach pomiaru odchyłki równoległości osi uzyskano identyczne wartości niepewności (pomimo całkiem różnych modeli pomiaru), co można tłumaczyć dużym podobieństwem zadań pomiarowych i wymiarów mierzonego przedmiotu.

### LITERATURA

- Płowucha W. „Szacowanie niepewności pomiarów współrzędnościowych metodą analizy wrażliwości – podstawy teoretyczne”. *Mechanik*. 11 (2018): s. 4.
- Płowucha W. „Uncertainty of coordinate measurement of geometrical deviations”. *Procedia CIRP*. 75 (2018): s. 361–366.
- ISO/TS 15530-1:2013 Geometrical product specifications (GPS). Coordinate measuring machines (CMM): Technique for determining the uncertainty of measurement. Part 1: Overview and metrological characteristics.
- Płowucha W., Jakubiec W. „Wyznaczanie niepewności pomiarów współrzędnościowych. Cz. 3: Zastosowanie przedmiotu wzorcowego”. *Mechanik*. 8–9 (2014): CD1 s. 113–121.
- JCGM 100:2008 Evaluation of measurement data. Guide to the expression of uncertainty in measurement.
- ISO 1101:2017 Geometrical product specifications (GPS). Geometrical tolerancing. Tolerances of form, orientation, location and run-out. ■