

Szacowanie niepewności pomiarów współrzędnościowych metodą analizy wrażliwości – podstawy teoretyczne

Evaluation of coordinate measurement uncertainty by sensitivity analysis – theoretical background

WOJCIECH PŁOWUCHA*

DOI: <https://doi.org/10.17814/mechanik.2018.11.168>

Na przykładzie pomiaru promienia okręgu i promienia łuku okręgu przedstawiono podstawy teoretyczne nowej metody szacowania niepewności pomiarów współrzędnościowych. Jako informację wejściową wykorzystuje się w tej metodzie wzór na błąd graniczny dopuszczalny pomiaru długości i wyniki wzorcowania maszyny.

SŁOWA KLUCZOWE: niepewność pomiaru, analiza wrażliwości, pomiary współrzędnościowe

Theoretical background of new method for uncertainty evaluation was presented on the examples of measurement of circle and arc radius. The method uses the formula for CMM maximum permissible error of length measurement and the reverification test results as the input data.

KEYWORDS: measurement uncertainty, sensitivity analysis, coordinate measurement

Szacowanie niepewności pomiarów współrzędnościowych należy do ważnych problemów w obliczu powszechnego stosowania współrzędnościowych maszyn pomiarowych (CMM). Dotychczasowe podejście do tego zagadnienia czyni je jednak niedostępnym, a nawet niezrozumiałym dla zwykłego użytkownika. W ATH trwają prace nad uporządkowaniem i upowszechnieniem tej problematyki [1].

Specyfikacja techniczna ISO/TS 15530-1 [2] rozróżnia trzy metody szacowania niepewności pomiaru. Metoda z użyciem przedmiotu wzorcowego doczekała się normy ISO 15530-3 [3] i jest dość szczegółowo opisana w [4]. Metoda z użyciem symulacji jest przedmiotem specyfikacji technicznej ISO/TS 15530-4 [5]. Jej stosowanie jest ograniczone, ponieważ wymaga użycia specjalnego oprogramowania. Trzecia – metoda analizy wrażliwości – zgodnie z zakorzenionym przekonaniem nadaje się jedynie do szacowania niepewności w przypadku prostych zadań. To stwierdzenie nawiązuje do publikacji [6], w której jako przykład zastosowania wskazuje się z kolei publikację [7] poświęconą szacowaniu niepewności pomiaru średnicy małych otworów. Co prawda istnieje dokument VDI/VDE 2617-11 [8], który formalnie zawiera informacje umożliwiające szacowanie niepewności pomiarów współrzędnościowych metodą analizy wrażliwości, ale opisana procedura jest złożona, a przytoczone w nim dwa przykłady dotyczą tylko średnicy i odległości osi od płaszczyzny.

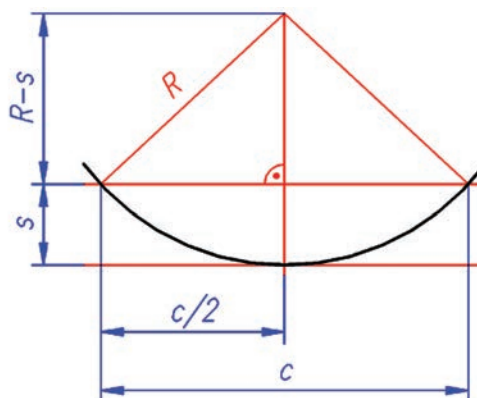
Istotne bariery w zastosowaniu metody analizy wrażliwości to duża liczba punktów próbkowania i złożoność

modeli pomiarów, które wymagają znajomości błędów geometrycznych CMM. Pierwsza przeszkoda została pokonana, kiedy Jakubiec w pracy [9] zdefiniował model pomiaru oparty na minimalnej matematycznie liczbie punktów i wskazał na możliwość traktowania pomiaru współrzędnościowego jako pośredniego, gdzie wielkościami mierzonymi bezpośrednio są różnice współrzędnych par punktów, a niepewność pomiaru różnic współrzędnych można oszacować na podstawie informacji statystycznej o błędach geometrycznych i błędach głowicy CMM. Opracowana metoda jest uniwersalna, ale jej istotną wadą jest znaczna pracochłonność na etapie identyfikacji błędów CMM [10, 11].

Autor niniejszej publikacji zauważył, że jeśli niepewność pomiaru różnic współrzędnych wyrazi się z użyciem wzoru na błąd graniczny dopuszczalny pomiaru długości ($E_{L, MPE}$), to otrzymuje się znaczne uproszczenie potrzebnych analiz, kosztem ewentualnego, nieznacznego nadszacowania niepewności pomiaru [12]. Na tej podstawie została opracowana metoda zgodna ze współczesnym podejściem do szacowania niepewności pomiarów, a jednocześnie prosta metodologicznie, uwzględniająca istotę techniki współrzędnościowej i dzięki temu możliwa do bezpośredniego zastosowania.

Istota nowej metody analizy wrażliwości

Jako wstęp do opisu nowej metody szacowania niepewności pomiaru współrzędnościowego zostanie przytoczony znany przykład szacowania niepewności pomiaru pośredniego promienia łuku płaskiego przedmiotu. Pomiar jest wykonany za pomocą mikroskopu pomiarowego, a wielkościami mierzonymi bezpośrednio są strzałka s i cięciwa c (rys. 1).



Rys. 1. Zasada pomiaru promienia łuku mikroskopem

* Dr inż. Wojciech Płowucha (wpłowucha@ath.bielsko.pl) – Akademia Techniczno-Humanistyczna w Bielsku-Białej, Laboratorium Metrologii

Promień łuku R oblicza się według wzoru:

$$R = \frac{c^2}{8s} + \frac{s}{2} \quad (1)$$

a złożoną standardową niepewność pomiaru (przy założeniu braku korelacji) – ze wzoru:

$$u_R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial c} \cdot u_c\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial s} \cdot u_s\right)^2} \quad (2)$$

w którym:

$$\frac{\partial R}{\partial c} = \frac{c}{4s} \quad (3)$$

$$\frac{\partial R}{\partial s} = \frac{-c^2}{8s^2} + \frac{1}{2} \quad (4)$$

Zgodnie ze współczesnym podejściem do szacowania niepewności pomiaru obie niepewności standardowe u_s i u_c można oszacować metodą typu B, na podstawie znajomości wzoru na błąd graniczny dopuszczalny pomiaru długości, który dla mikroskopów i CMM przyjmuje ogólną postać typu $E_{L,MPE} = A + BL$.

Norma ISO 14253-2 [13, p. 8.4.5] jako jedną z możliwości szacowania niepewności bierze pod uwagę przyjęcie wartości $E_{L,MPE}$ jako największej możliwej wartości tego błędu ($a = E_{L,MPE}$) i dobrane odpowiedniego rozkładu prawdopodobieństwa, na podstawie którego można przeliczyć wartość a na niepewność standardową. W przypadku użycia rozkładu jednostajnego $u = a/\sqrt{3}$. Dość często da się uzasadnić użycie rozkładu normalnego i wtedy można przyjąć $u = a/2$ lub nawet $u = a/3$ [14]. W niniejszym artykule przyjęto ostatnią z tych możliwości; wtedy:

$$u_c = (A + Bc)/3 \quad (5)$$

$$u_s = (A + Bs)/3 \quad (6)$$

Dalej podano trzy przykłady opracowania wyników pomiaru tego samego przedmiotu, różniące się przyjętą strategią, a konkretnie – wartością strzałki s . Do obliczeń przyjęto, że błąd graniczny dopuszczalny pomiaru długości $E_{L,MPE} = 2 + 0,004L$.

Opracowanie wyników pomiaru tego samego przedmiotu ($R = 50$ mm) w postaci budżetów niepewności dla różnych wartości strzałki s przedstawiono w tabl. I–III.

TABLICA I. Budżet niepewności dla pomiaru promienia łuku mikroskopem; strzałka łuku $s = 8$ mm

	mm	$\partial R/\partial$	$u_i, \mu\text{m}$	$\partial R/\partial \cdot u_i, \mu\text{m}$
s	8,000	-5,25	0,68	-3,56
c	54,259	1,7	0,75	1,25
			$u =$	3,77

TABLICA II. Budżet niepewności dla pomiaru promienia łuku mikroskopem; strzałka łuku $s = 25$ mm

	mm	$\partial R/\partial$	$u_i, \mu\text{m}$	$\partial R/\partial \cdot u_i, \mu\text{m}$
s	25,000	-1,00	0,70	-0,70
c	86,603	0,87	0,78	0,68
			$u =$	0,97

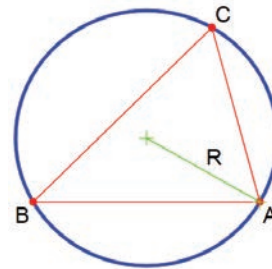
TABLICA III. Budżet niepewności dla pomiaru promienia łuku mikroskopem; strzałka łuku $s = 50$ mm

	mm	$\partial R/\partial$	$u_i, \mu\text{m}$	$\partial R/\partial \cdot u_i, \mu\text{m}$
s	50,000	0	0,73	0
c	100,001	0,5	0,8	0,40
			$u =$	0,40

Przykłady wskazują, że niepewność pomiaru promienia łuku istotnie zależy od strategii pomiaru. Mimo że pomiary są wykonywane tym samym przyrządem, niepewność maleje ze wzrostem przyjętej do pomiaru wartości strzałki łuku. W ostatnim przykładzie mamy do czynienia z pomiarem średnicy: pochodna po s jest równa zero, co oznacza, że niepewność pomiaru strzałki nie ma wpływu na niepewność pomiaru promienia.

Analiza wrażliwości w odniesieniu do pomiaru współrzędnościowego promienia łuku okręgu

Proponowany w nowej wersji metody analizy wrażliwości model pomiaru współrzędnościowego wykorzystuje minimalną matematycznie liczbę punktów. Podobnie jak w poprzednim przypadku, informację o dokładności maszyny stanowi ten sam wzór na $E_{L,MPE}$ i ten sam rozkład prawdopodobieństwa. Jako model pomiaru przyjęto wzór na promień okręgu opisanego na trójkącie (rys. 2).



Rys. 2. Model pomiaru współrzędnościowego promienia okręgu

Promień okręgu oblicza się według wzoru:

$$R = \frac{abc}{4S} \quad (7)$$

gdzie: a, b, c – długości boków; S – powierzchnia trójkąta.

Długości boków wyrażone za pomocą różnic współrzędnych punktów (składowych wektorów) wynoszą:

$$a = \sqrt{x_{CB}^2 + y_{CB}^2 + z_{CB}^2} \quad (8)$$

$$b = \sqrt{x_{AC}^2 + y_{AC}^2 + z_{AC}^2} \quad (9)$$

$$c = \sqrt{x_{AB}^2 + y_{AB}^2 + z_{AB}^2} \quad (10)$$

Powierzchnię S trójkąta można obliczyć, korzystając z interpretacji geometrycznej iloczynu wektorowego według wzoru (jako punkt A należy przyjmować wierzchołek leżący naprzeciwko najdłuższego boku trójkąta):

$$S = |AB \times AC|/2 \quad (11)$$

Dla ułatwienia dalszych obliczeń przyjęto następujące oznaczenia:

$$M_1 = y_{AB} \cdot z_{AC} - z_{AB} \cdot y_{AC} \quad (12)$$

$$M_2 = -x_{AB} \cdot z_{AC} + z_{AB} \cdot x_{AC} \quad (13)$$

$$M_3 = x_{AB} \cdot y_{AC} - y_{AB} \cdot x_{AC} \quad (14)$$

$$M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} \quad (15)$$

Ostatecznie promień R można zapisać jako:

$$R = \frac{abc}{2M} \quad (16)$$

Promień R jest funkcją dziewięciu składowych wektorów $AB(x_{AB}, y_{AB}, z_{AB})$, $AC(x_{AC}, y_{AC}, z_{AC})$ i $CB(x_{CB}, y_{CB}, z_{CB})$, albo inaczej: dziewięciu różnic współrzędnych punktów A , B i C .

Niepewność pomiaru promienia oblicza się ze wzoru:

$$u_R = \sqrt{\sum_{i=1}^9 \left(\frac{\partial R}{\partial x_i} u_{xi} \right)^2} \quad (17)$$

gdzie różnice współrzędnych x, y i z są oznaczane ogólnie jako x_i , niepewności standardowe ich pomiaru są oznaczane ogólnie jako u_{xi} i obliczane (podobnie jak poprzednio) według wzoru:

$$u_{xi} = E_{L,MPE}/3 = (2 + 0,004x_i)/3 \quad (18)$$

Potrzebne do budżetu odpowiednie pochodne cząstkowe są następujące:

$$\frac{\partial R}{\partial x_{AB}} = \frac{abx_{AB}}{2cM} - \frac{abc(-M_2z_{AC} + M_3y_{AC})}{2M^3} \quad (19)$$

$$\frac{\partial R}{\partial y_{AB}} = \frac{aby_{AB}}{2cM} - \frac{abc(M_1z_{AC} - M_3x_{AC})}{2M^3} \quad (20)$$

$$\frac{\partial R}{\partial z_{AB}} = \frac{abz_{AB}}{2cM} - \frac{abc(-M_1z_{AC} + M_2y_{AC})}{2M^3} \quad (21)$$

$$\frac{\partial R}{\partial x_{AC}} = \frac{acx_{AC}}{2bM} - \frac{abc(M_2z_{AB} - M_3y_{AB})}{2M^3} \quad (22)$$

$$\frac{\partial R}{\partial y_{AC}} = \frac{acy_{AC}}{2bM} - \frac{abc(-M_1z_{AB} + M_3x_{AB})}{2M^3} \quad (23)$$

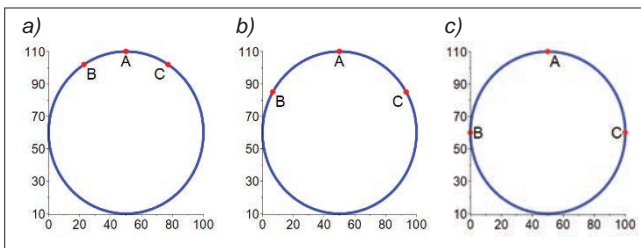
$$\frac{\partial R}{\partial z_{AC}} = \frac{acz_{AC}}{2bM} - \frac{abc(M_1y_{AB} - M_2x_{AB})}{2M^3} \quad (24)$$

$$\frac{\partial R}{\partial x_{CB}} = \frac{bcx_{CB}}{2aM} \quad (25)$$

$$\frac{\partial R}{\partial y_{CB}} = \frac{bcy_{CB}}{2aM} \quad (26)$$

$$\frac{\partial R}{\partial z_{CB}} = \frac{bcz_{CB}}{2aM} \quad (27)$$

Dalej podano trzy przykłady opracowania wyników pomiaru tego samego przedmiotu ($R = 50$ mm), odpowiadające opisanym strategiom pomiaru (rys. 3).



Rys. 3. Rozmieszczenie punktów próbkowania: a) $s = 8$ mm, b) $s = 25$ mm, c) $s = 50$ mm

Opracowanie wyników pomiaru w postaci budżetów niepewności przedstawiono w tabl. IV–VI.

TABLICA IV. Budżet niepewności – przykład z rys. 3a

Składnik	x_i , mm	$\frac{\partial l}{\partial x_i}$	u_{xi} , μm	$\frac{\partial l}{\partial x_i} u_{xi}$, μm
x_{AB}	-27,129	-0,774	0,703	-0,544
y_{AB}	-8,00	2,625	0,677	1,778
z_{AB}	0,00	0,000	0,667	0,000
x_{AC}	27,129	0,774	0,703	0,544
y_{AC}	-8,00	2,625	0,677	1,778
z_{AC}	0,00	0,000	0,667	0,000
x_{BC}	54,259	0,922	0,739	0,681
y_{BC}	0,00	0,000	0,667	0,000
z_{BC}	0,00	0,000	0,667	0,000
$u =$				2,72

TABLICA V. Budżet niepewności – przykład z rys. 3b

Składnik	x_i , mm	$\frac{\partial l}{\partial x_i}$	u_{xi} , μm	$\frac{\partial l}{\partial x_i} u_{xi}$, μm
x_{AB}	-43,301	-0,289	0,724	-0,209
y_{AB}	-25,0	0,500	0,700	0,350
z_{AB}	0,0	0,00	0,667	0,000
x_{AC}	43,301	0,289	0,724	0,209
y_{AC}	-25,0	0,500	0,700	0,350
z_{AC}	0,0	0,000	0,667	0,000
x_{BC}	86,603	0,577	0,782	0,452
y_{BC}	0,0	0,000	0,667	0,000
z_{BC}	0,0	0,000	0,667	0,000
$u =$				0,732

TABLICA VI. Budżet niepewności – przykład z rys. 3c

Składnik	x_i , mm	$\frac{\partial l}{\partial x_i}$	u_{xi} , μm	$\frac{\partial l}{\partial x_i} u_{xi}$, μm
x_{AB}	-50	0,0	0,733	0,0
y_{AB}	-50	0,0	0,733	0,0
z_{AB}	0	0,0	0,667	0,0
x_{AC}	50	0,0	0,733	0,0
y_{AC}	-50	0,0	0,733	0,0
z_{AC}	0	0,0	0,667	0,0
x_{BC}	100	0,5	0,800	0,4
y_{BC}	0	0,0	0,667	0,0
z_{BC}	0	0,0	0,667	0,0
$u =$				0,4

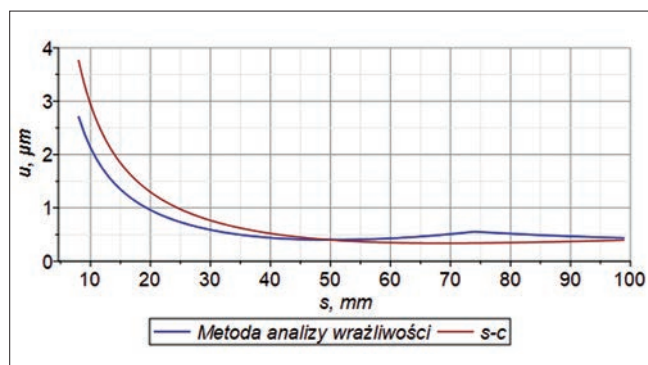
W budżecie niepewności przedstawionym w tabl. IV cztery pochodne cząstkowe są równe 0, co wynika z tego, że mierzony okrąg leży w płaszczyźnie xy układu współrzędnych maszyny. Największe składniki niepewności są związane z różnicami współrzędnych y punktów A i B oraz A i C , ponieważ związane z nimi wagi (pochodne cząstkowe) są duże.

W budżecie niepewności przedstawionym w tabl. V, podobnie jak poprzednio, cztery pochodne cząstkowe są równe 0. Zmieniły się wartości składników niepewności, przy czym największy jest składnik związany z różnicą współrzędnych x punktów B i C .

W budżecie niepewności przedstawionym w tabl. VI tylko jedna pochodna cząstkowa – i w konsekwencji jeden składnik niepewności pomiaru – mają wartość różną od zera. Jest to składnik x_{BC} związany z pomiarem różnicy współrzędnych x leżących na średnicy punktów B i C . Otrzymana wartość niepewności pomiaru jest mniejsza

niż w poprzednim przykładzie. Strategia próbkowania odnosi się do bezpośredniego, dwupunktowego pomiaru średnicy. Punkt *A* bierze udział w pomiarze tylko w ten sposób, że wskazuje, gdzie ma być mierzona średnica okręgu. Podobny efekt można uzyskać, gdy punkty *B* i *C* będą leżały blisko siebie naprzeciwko punktu *A*.

Wyniki porównania dwóch omówionych modeli pomiaru promienia łuku okręgu przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4. Porównanie dwóch modeli pomiaru promienia łuku okręgu

To, że różne modele prowadzą do różnych oszacowań niepewności pomiaru, jest oczywiste. Można jednak zauważyć, że uzyskane wartości niepewności pomiaru nie różnią się istotnie. Przedstawiony wykres obejmuje wartości strzałki łuku od 8 mm do 98 mm, czyli również przekraczające wartość jego promienia *i*, co ciekawe, model oparty na pomiarze strzałki i cięciwy (*s-c*) daje minimalne wartości niepewności w przypadku, kiedy (w przybliżeniu) strzałka łuku i cięciwa łuku są jednakowe, co w pomiarze współrzędnościowym odpowiada równomiernemu rozmieszczeniu punktów.

Niepewność pomiaru średnicy okręgu

Zazwyczaj, kiedy celem pomiaru współrzędnościowego jest wymiar globalny, czyli średnica okręgu średniego, Czebyszewa, najmniejszego opisanego lub największego wpisanego [14], odpowiednią strategią jest równomierne rozmieszczenie punktów próbkowania. Właściwy będzie tutaj model pomiaru, w którym punkty charakterystyczne są rozmieszczone co 120° . Dla takiego przypadku otrzymano wartość standardowej niepewności pomiaru promienia ($R = 50$ mm) równą $u = 0,53$ μm.

Rzadziej, gdy celem pomiaru współrzędnościowego jest wymiar lokalny dwupunktowy [14], bardziej odpowiednie są: model z punktami rozmieszczonymi jak na rys. 3c oraz model z punktami *B* i *C* znajdującymi się blisko siebie, naprzeciwko punktu *A*. W pierwszym przypadku otrzymuje się wartość niepewności standardowej pomiaru promienia $u = 0,40$ μm, w drugim $u = 0,43$ μm.

Wnioski

Opracowana metoda jest uniwersalna. Pozwala na szacowanie niepewności pomiaru wszystkich charakterystyk geometrycznych, a więc zarówno wymiarów, jak i odchylek geometrycznych.

Metoda jest spójna z procedurą wzorcowania, polegającą na pomiarze długości płytek wzorcowych, ustalanych m.in. wzdłuż osi układu współrzędnych CMM. Przedstawiony model jako informację wejściową wykorzystuje informację bezpośrednio związaną ze wzorcowaniem.

Model wykorzystuje minimalną matematycznie liczbę punktów, które mogą być utożsamiane z punktami próbkowania. W rzeczywistych pomiarach liczba punktów próbkowania jest znacznie większa od minimalnej matematycznie, więc otrzymane wartości niepewności mogą być co najwyżej wyższe od faktycznej niepewności pomiaru, co jest zgodne z zasadami, a wręcz zalecane, jeśli dzięki temu uzyskuje się obniżenie kosztów lub skrócenie czasu opracowania wyników pomiaru [13].

Opracowana metoda pozwala na zaobserwowanie związków między niepewnością pomiaru długości a niepewnością pomiaru różnych charakterystyk geometrycznych, jakimi są wymiary elementów integralnych czy odchylki geometryczne.

Arkusze kalkulacyjny zawierający obliczenia można znaleźć na stronie Laboratorium Metrologii ATH w zakładce „Do pobrania” (www.lm.ath.bielsko.pl).

LITERATURA

- Płowucha W., Werner T., Savio E., Blunt L., Jakubiec W. „A new didactic approach to statistical analysis of measurement data for the evaluation of measurement uncertainty – SAM-EMU”. *Measurement*. 45 (2012): s. 2359–2367.
- ISO/TS 15530-1:2013 – Geometrical product specifications (GPS). Coordinate measuring machines (CMM): Technique for determining the uncertainty of measurement.
- PN-EN ISO 15530-3:2011 – Specyfikacje geometrii wyrobów (GPS). Współrzędnościowe maszyny pomiarowe (CMM): Metoda wyznaczania niepewności pomiaru. Część 3: Zastosowanie przedmiotów wzorcowych i wzorców.
- Płowucha W., Jakubiec W. „Wyznaczanie niepewności pomiarów współrzędnościowych. Cz. 3: Zastosowanie przedmiotu wzorcowego”. *Mechanik*. 8–9 (2014) CD1, s. 113–121.
- ISO/TS 15530-4:2008 – Geometrical Product Specifications (GPS). Coordinate measuring machines (CMM): Technique for determining the uncertainty of measurement. Part 4: Evaluating task-specific measurement uncertainty using simulation.
- Wilhelm R.G., Hocken R., Schwenke H. „Task specific uncertainty in coordinate measurement”. *CIRP Annals*. 50, 2 (2001): s. 553–563.
- Phillips S.D. i in. „The estimation of measurement uncertainty of small circular features measured by coordinate measuring machines”. *Precision Engineering* (1998) 22:87–97.
- VDI/VDE 2617-11 – Accuracy of coordinate measuring machines. Characteristics and their checking. Determination of the uncertainty of measurement for coordinate measuring machines using uncertainty budgets.
- Jakubiec W. „Analityczne wyznaczanie niepewności pomiaru we współrzędnościowej technice pomiarowej”. Bielsko-Biała: Wydawnictwo Akademii Techniczno-Humanistycznej, 2007.
- Jakubiec W., Płowucha W. „Wyznaczanie niepewności pomiarów współrzędnościowych. Cz. 1: Podstawy teoretyczne”. *Mechanik*. 5–6 (2012): s. 452–455.
- Jakubiec W., Płowucha W. „Wyznaczanie niepewności pomiarów współrzędnościowych. Cz. 2: Oprogramowanie EMU”. *Mechanik*. 7 (2012): s. 580–582.
- Płowucha W. „Simplified algorithm of coordinate measurements uncertainty evaluation”. *11th International Symposium on Measurement and Quality Control*. 11–13 września 2013, Kraków–Kielce.
- PN-EN ISO 14253-2 – Specyfikacje geometrii wyrobów (GPS). Kontrola wyrobów i wyposażenia pomiarowego za pomocą pomiarów. Część 2: Wytyczne szacowania niepewności pomiarów w GPS, przy wzorcowaniu wyposażenia pomiarowego i sprawdzaniu wyrobów.
- PN-EN ISO 14405-1:2016-12 – Specyfikacje geometrii wyrobów (GPS). Tolerowanie wymiarów. Część 1: Wymiary liniowe wewnętrzne lub zewnętrzne.
- Płowucha W. „Uncertainty of coordinate measurement of geometrical deviations”. *The 15th CIRP Conference on Computer Aided Tolerancing – CIRP CAT 2018. Procedia CIRP* (2018). DOI:10.2016/j/procir.2018.04.071.