Analiza stanów krytycznych mostu w czasoprzestrzeni

Analysis of critical state for bridge in 3D-time space

JAN OBRĘBSKI *

DOI: https://doi.org/10.17814/mechanik.2018.7.93

W pracy zbadano możliwość oceny stanu krytycznego mostu pod wpływem obciążeń ruchomych, z zastosowaniem jednolitego kryterium oceny geometrycznej zmienności i utraty stateczności konstrukcji oraz czasoprzestrzeni modelowanej różnicami skończonymi. Oba ujęcia numeryczne zostały zaproponowane przez autora. Wspomnianym kryterium jest zerowa wartość głównego wyznacznika dynamicznej macierzy sztywności dla mostu, a nawet zadania – gdy obciążenie porusza się dalej poza przęsłem. Wyniki przykładów liczbowych pokazują skuteczność metody i wpływ różnych parametrów na stany krytyczne.
SŁOWA KLUCZOWE: czasoprzestrzeń, różnice skończone, most, stan krytyczny

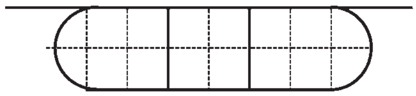
In the paper was pointed possibility to evaluate critical state of bridge under travelling loading, applying uniform criterion for geometrical changeability and instability of structure and 3D-time space method modelled by finite differences. The both numerical methods are formulated by present author. In the above criterion is used value of main determinant of dynamical stiffness matrix for bridge or even for task, when loading is travelling beyond span. Results shows efficacy of the method and influence of some parameters.
KEYWORDS: dynamics, 3D-time space, finite differences, bridge, critical state

Praca stanowi poważny krok w badaniu zastosowań czasoprzestrzeni (dalej: CzP) i jednolitego kryterium – sformułowanych przez autora – do analizy stanów krytycznych konstrukcji. Szersze spojrzenie na rozwój zastosowania CzP do analizy dynamicznej różnych konstrukcji przedstawiono podczas poprzedniej Międzynarodowej Szkoły Komputerowego Wspomagania Projektowania, Wytwarzania i Eksploatacji [17] oraz w publikacjach autora w księgach konferencji LSCE.

We wspomnianej metodzie do opisu zadania oprócz trzech wymiarów dodaje się czwarty – czas. Duży wkład w zakresie zastosowania CzP do zadań mechanicznych wnieśli: Z. Kączkowski [4–6], który wprowadził formalizm metody elementów skończonych, a także jego współpracownicy [17], którzy stosowali CzP w różnym ujęciu. Według tej koncepcji wykonali oni przykłady dotyczące dość prostych zadań technicznych. Oczywiście ich badania były poprzedzone szeregiem prac innych autorów.

Przełomem w tym zakresie był doktorat R. Szmita [20]. Do analizy zachowania się budynku wysokiego autor zastosował numeryczne podejście wykorzystujące CzP wraz z metodą różnic skończonych (MRS). Okazało się ono w pełni skuteczne. Jedyną trudnością było właściwe dobranie tzw. kroku czasowego. Ostatecznie ujęcie to otrzymało nazwę 3D-TSM (*3D-time space method)*.

Niemal równolegle do prac R. Szmita autor niniejszego artykułu i pomysłodawca metody wykonał liczne przykłady dotyczące innych obiektów inżynierskich – obciążeń ruchomych na mostach, drogach i pasach startowych lotniska. Testował modele prętowe i płytowe. Niektóre zadania wykonali – jako prace domowe (2017) – studenci teorii konstrukcji (A. Franus, J. Kutyna, J. Rawiak, Ł. Rogula i T. Tarabasz), wykorzystując programy komercyjne dostępne na Wydziale Inżynierii Lądowej Politechniki Warszawskiej. Dało to ocenę skuteczności metody i jakości wyników dla mostu o przekroju z rys. 1.



Rys. 1. Analizowany przekrój mostu stalowego, zbliżony do rzeczywistego [17, 18]

Obliczenia wykonane przez studentów były obarczone błędami, dlatego autor podjął szeroko zakrojone prace mające na celu uzyskanie poprawnych wyników, które zostaną publikowane odrębnie. Po korekcie zakresu prac powierzonych studentom wykonano obliczenia dla mas 20 t i 100 t, poruszających się z różnymi prędkościami po moście o rozpiętości: L = 50, 60, 70, 80, 90 i 100 m. Oceniano też wpływ gęstości podziału dźwigara na odcinki: n = 8 lub n = 10. Ubocznym efektem tych badań jest ta praca, ukierunkowana na stany krytyczne dynamiki mostu o przekroju pokazanym na rys. 1, przy założeniach zbliżonych do podanych studentom. Jako podstawowe narzędzia wykorzystano sformułowane przez autora: jednolite kryterium oceny geometrycznej zmienności i utraty stateczności konstrukcji (JK GZ+US) [9–11, 14–16] oraz 3D-TSM [12, 13, 17].

Jednolite kryterium (JK GZ+US)

Na badanie wartości Δ wyznacznika głównego (WG) macierzy sztywności (K, $(6)_1$) zwrócono uwagę w książce [1]: *przy obliczeniach numerycznych wartość macierzy współczynników układu równań równowagi wszystkich węzłów musi być różna od zera*. *W przeciwnym razie oznacza to geometryczną zmienność* (*GZ*) *układu prętowego*. W publikacji tej podkreślano czasochłonny charakter metody. Podano, że analiza konstrukcji o 238 węzłach i 792 prętach w programie napisanym w języku ALGOL 60 zajęła 90 min (w 1970 r.).

Obecnie można stwierdzić, że jest to ścisła metoda, najbardziej pomysłowa i skuteczna, przyjmująca za miernik wartość zerową WG macierzy K układu, gdzie Δ = det[K] = 0 świadczy o GZ lub utracie stateczności. Ten warunek autor wykorzystał w programach WDKM i KMT [8, 2] do numerycznego sprawdzenia, w dwóch etapach, GZ konstrukcji prętowych o dowolnej kombinacji węzłów sztywnych i przegubowych. Na pierwszym etapie komputer sprawdzał, w sensie lokalnym, postulaty sprecyzowane w pracy [8] i cytowane w [2]. Na drugim etapie, wykonywanym już po ułożeniu macierzy K, w trakcie wyznaczania niewiadomych metodą kolejnych eliminacji Gaussa, obliczano wartości WG według wzoru [7]:

* Prof. dr hab. inż. Jan B. Obrębski (jobrebski@poczta.onet.pl), emerytowany profesor zwyczajny Politechniki Warszawskiej

$$\Delta = \det[\mathrm{K}] = \mathrm{K}_{11}\,\mathrm{K}^{1}_{22}\,\mathrm{K}^{2}_{33}\ldots\mathrm{K}^{l\text{-}1}_{ll}\ldots\mathrm{K}^{n\text{-}1}_{nn} \tag{1}$$

Jest to iloczyn wyrazów stojących na głównej przekątnej zmodyfikowanej po n eliminacjach macierzy sztywności, w wierszu o numerze n (z pewnymi ograniczeniami – patrz [8]).

Należy też wskazać, że w przypadku rozwiązań analitycznych siłę krytyczną według Eulera wyznaczano, przyrównując do zera jedno wyrażenie otrzymane na bazie równania różniczkowego i warunków brzegowych. Podobnie postępowano przy określaniu (krytycznych) częstości drgań własnych [3]. Własow też korzystał z przyrównania do zera wyznacznika otrzymanego na bazie układu trzech równań różniczkowych (patrz m.in. [9, 10]).

Również w podręczniku [9] podano przykład wyznaczenia – z zastosowaniem jednolitego kryterium – stanu krytycznego dla pręta obciążonego siłą podłużną P i drgającego z częstością drgań ω. Dalej, w pracach [15, 16], przytoczono przykłady różnych kombinacji obciążeń podłużnych i poprzecznych, dających w rezultacie stan krytyczny pręta, a ponadto wyznaczono graniczne krzywe obciążeń krytycznych i graniczne powierzchnie krytyczne.

Wykorzystane równania różniczkowe

We wspomnianych zadaniach oraz w doktoracie R. Szmita wykorzystano bardzo ogólne równania ruchu podane w podręczniku [9]. Jest to w sumie układ czterech równań różniczkowych drugiego i czwartego rzędu, z pochodnymi względem współrzędnej η, liczonej wzdłuż długości belki, dla kątów skręcenia i trzech przemieszczeń określonych względem osi układu odniesienia i czasu. W ogólnym przypadku równania te są ze sobą powiązane przez przemieszczenia v_i (podłużne, poprzeczne) i skręcenia Θ względem osi podłużnej pręta. Opisują one zarówno drgania swobodne i wymuszone, jak i ich tłumienie przez otaczający ośrodek (interakcję), w tym grunt, powietrze i wodę.

Wspomniane ogólne równania ruchu opracowano początkowo na potrzeby teorii prętów cienkościennych. Teoria ta obejmuje statykę, dynamikę i teorię drugiego rzędu, w tym stateczność pojedynczego pręta. Pręty pryzmatyczne mogą w tej teorii mieć dowolne przekroje poprzeczne, złożone z kilku materiałów, otwarte i zamknięte, a także mieć zdefiniowane różne warunki brzegowe. Ośrodek może opływać pręt z określoną prędkością. Dzięki takim założeniom teoria znajduje zastosowanie w bardzo wielu zadaniach.

W pracach [15–17] pokazano, że wspomniane równania ruchu dla dźwigara mostowego można znacząco uprościć, pomijając wiele wyrazów. Wynika to ze specyfiki zadania. W ten sposób zostały dwa równania niezależne od siebie, opisujące zginanie v_3 i skręcanie Θ (oznaczenia są zgodne z pracami [9, 10, 18]:

$$\overline{E}\overline{I}_2 v_3^{IV} + \mu\ddot{v}_3 - \ddot{v}_3'' I_{2m} = q_3^{w} \tag{2}$$

$$\begin{gathered}\overline{E}\overline{I}_{\hat{\omega}}\Theta^{IV} - K_s\Theta'' + \ddot{\Theta}[I_{2m} + I_{3m} + \mu(\eta_{3A})^2] + \\ - \ddot{\Theta}'' I_{\hat{\omega}m} = m_1^{w}\end{gathered} \tag{3}$$

Różnicowe równania ruchu dla obciążeń mostu

Zastosowano tu do opisu zadania CzP w ujęciu numerycznym 3D-TSM, wykorzystującym MRS. Umożliwia to uzyskanie odpowiedzi mostu na praktycznie dowolne obciążenia ruchome, a jednocześnie na pokazanie odkształceń układu w każdej z rozpatrywanych chwil czasowych [17]. Przyjmowano, że most jest belką cienkościenną o dużych rozmiarach, o długości L, podzieloną na n odcinków o wymiarze $a = \Delta\,\eta = l/n$, z punktami podziału o kolejnych numerach i. Linię ugięcia belki określa się w m kolejnych chwilach czasowych o numerach t.

Dwa różniczkowe równania ruchu (2) i (3) w sposób formalny zamieniono na operatory różnicowe (4) i (5), zastępując poszczególne pochodne, w tym cząstkowe, ich odpowiednikami różnicowymi [10]. Dolne indeksy, oddzielone przecinkiem, wskazują aktualny punkt w czasoprzestrzeni, oznaczony indeksem (t, i). Ten sam punkt i podziału belki w chwili poprzedniej oznaczono (t–1, i), a dla następnej (t + 1, i). Ugięcie pionowe belki oznaczono jako $w = v_3$. Po przemnożeniu równania (2) przez $a^4/\overline{E}\,\overline{I}_2$ i równania (3) przez $a^4/\overline{E}\,\overline{I}_{\hat{\omega}}$ oraz po przegrupowaniu wyrazów otrzymano niezależne różnicowe równania ruchu: dla zginania w płaszczyźnie pionowej (4) i dla skręcania (5):

$$\begin{gathered}w_{t-1,i-1}K_1 + w_{t-1,i}K_2 + w_{t-1,i+1}K_1 + \\ + w_{t,i-2} + w_{t,i-1}K_3 + w_{t,i}K_4 + w_{t,i+1}K_3 + w_{t,i+2} + \\ + w_{t+1,i-1}K_1 + w_{t+1,i}K_2 + w_{t+1,i+1}K_1 = Q\end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered}\Theta_{t-1,i-1}G_1 + \Theta_{t-1,i}G_2 + \Theta_{t-1,i+1}G_1 + \\ + \Theta_{t,i-2} + \Theta_{t,i-1}G_3 + \Theta_{t,i}G_4 + \Theta_{t,i+1}G_3 + \Theta_{t,i+2} + \\ + \Theta_{t+1,i-1}G_1 + \Theta_{t+1,i}G_2 + \Theta_{t+1,i+1}G_1 = S\end{gathered} \tag{5}$$

Symbole K_i oraz G_i oznaczają współczynniki [18]. Trzy wiersze tych wzorów opisują kolejne chwile czasowe.

Różnicowa dynamiczna macierz sztywności mostu

Po zapisaniu operatorów różnic skończonych (4) i/lub (5) dla wszystkich punktów podziału belki i otrzymuje się dynamiczną macierz sztywności (DMS), zawierającą informacje o schemacie dźwigara i prędkości oraz położeniu pojazdów na moście dla wszystkich założonych chwil czasowych (rys. 2). Zadanie sprowadza się do rozwiązania układu równań algebraicznych liniowych $(6)_1$ [10]. Jeśli do opisu zadania wykorzystuje się więcej niż jedno różnicowe równanie ruchu, np. wzory (4) i (5), otrzymuje się różnicowo-macierzowe równanie równowagi jednego węzła $(6)_3$:

$$\begin{gathered}Kx = Q \\ C_r \sum_{t-1}^{t+1}\left(A_{ro} + \sum_{\Lambda=1}^{n} A_{r\Lambda}E_{\Lambda}\right)\Phi_r = Q_r \\ \sum_{t-1}^{t+1}\left[\sum_{\Lambda=1}^{N}(W_{\Lambda}^{o} + W_{\Lambda}E_{\Lambda})\right]x = q\end{gathered} \tag{6}$$

Mówi się wówczas o metodzie równań różnicowo-macierzowych – w tym przypadku zastosowanej do czasoprzestrzeni (por. rys. 2). Taki opis stosowano do bardzo zaawansowanego numerycznie systemu obliczeniowego o nazwie WDKM [8]. Sposób tworzenia DMS konstrukcji podano m.in. w pracach [12, 20, 17]. Czasoprzestrzeń jako metoda komputerowa (3D-TSM) z punktu widzenia numerycznego jest zadaniem dwuwymiarowym [17, 18]. Tam rozpatruje się stan równowagi konstrukcji wspólnie dla wszystkich chwil czasowych t.

Tu K jako DMS [12] ma liczbę wierszy i kolumn $N = l \times n \times m$, gdzie l jest liczbą równań ruchu opisujących zadanie (np. cztery lub dwa – (4), (5)), n – liczba punktów podziału belki, m – liczba rozpatrywanych punktów czasowych, oddalonych od siebie o odcinek czasu Δt. Każdy element globalnej DMS – K[$N \times N$] jest tradycyjną macierzą sztywności K[$w \times w$], gdzie $w = l \times n$ [17, 18].

Jako warunki brzegowe uwzględnia się w sposób tradycyjny podparcie konstrukcji [10] oraz warunek początkowy dla $t = 0$ (znany lub równy zeru) i końcowy (najczęściej jako różnica „wstecz"). W pracy [18] pokazano też dwa warianty, gdy DMS tworzą dwa równania opisujące zginanie (4) i skręcanie (5).

	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$	$t = 6$	$t = 7$	
$t = 1$	K_r	V_r						Q_1
$t = 2$	V_r	K_r	V_r					Q_2
$t = 3$		V_r	K_r	V_r				Q_3
$t = 4$			V_r	K_r	V_r			Q_4
$t = 5$				V_r	K_r	V_r		Q_5
$t = 6$					V_r	K_r	V_r	Q_6
$t = 7$						V_r	K_r	Q_7

Rys. 2. DMS $(6)_1$ – K i wyrazy Q dla belki, gdy $m = 7$, $n = 7$, $l = 1$, w ruchu jednostajnym. Podmacierze mają wymiary: $K_r[7 \times 7]$, $V_r[7 \times 7]$

Przykłady obliczania stanów krytycznych dla mostu

Do testowania stanów krytycznych przyjęto fikcyjne przęsło mostu [18] o przekroju z rys. 1. Jest ono swobodnie podparte i w dwóch przeciwnych kierunkach ma po trzy pasy ruchu dla samochodów oraz pas dla rowerów i pieszych – każdy o szerokości 3 m. Szerokość dźwigara wynosi 30 m, a wysokość – 6 m. Dla skręcania na końcach przęsła przyjęto zerowe obroty i swobodę deplanacji. Dźwigar w każdym zadaniu miał przekrój o podobnym rysunku i trzy obwody zamknięte [17, 18]. Środkiem zewnętrznego pasa kołowego (na mimośrodzie $e = 7{,}5$ m) porusza się masa 20 t lub 100 t (siła $P = 200$ kN lub 1000 kN). Dźwigar jest skręcany momentem $M_1 = Pe$. Założono dwie długości dźwigara $L = 50$ i 100 m. Grubości δ jego ścian dobrano tak (z dokładnością 0,01 mm), aby przy sile nieruchomej ugięcia były mniejsze od $0{,}001L$.

Zmiana znaku wartości Δ WG dla DMS na wykresach oznacza, że w tym przedziale badanego parametru (tu: prędkości obciążenia) wystąpiła wartość krytyczna [18]. Otrzymywane wartości liczbowe były tak duże (np. $\Delta = 6{,}2E{+}p$), że uniemożliwiały sporządzenie wykresów, dlatego sporządzono orientacyjne wykresy wartości wykładnika potęg p liczb Δ. Wartości Δ dla skręcania są znacznie większe niż dla zginania dźwigara. Wielkość poruszającej się po moście masy przy obliczaniu Δ jest uwzględniona w jego sztywności i tym samym w masie dźwigara [18].

Wnioski z poprzednio wykonanych obliczeń

W kilku poprzednich publikacjach, cytowanych w [17, 18], pokazano linie ugięcia dla belek, po których masa poruszała się ruchem jednostajnym z różnymi prędkościami. Podobnie w pracy [13] porównano ugięcia belki mostowej o długości $L = 100$ m. Z przedstawionych tam rysunków wynika, że powyżej prędkości 360 km wykresy linii ugięcia wykazują osobliwości (pewien chaos), co może wskazywać na przekroczenie prędkości krytycznej. Pełna ocena zadania powinna więc nastąpić po wyznaczeniu linii ugięć.

Wykorzystane programy komercyjne

Podane w pracy [18] przykłady wykonano za pomocą programu MS Excel 2007. Dotyczy to ułożenia DMS oraz obliczenia dla niej wartości Δ dla WG i sporządzenia wykresów. W tym zakresie jest to bardzo wygodne narzędzie. Obliczenie wartości WG dla DMS odbywało się w czasie rzeczywistym (natychmiast). Natomiast rozwiązania układów równań algebraicznych liniowych $(6)_1$ – jako niedostępne – zostaną przeprowadzone za pomocą programów własnych.

Podsumowanie

Wykonane przykłady nie uwzględniły wielu problemów występujących w rzeczywistym moście. Mimo to otrzymane wyniki tabelaryczne i sporządzone na ich podstawie wykresy [18] potwierdzają przydatność JK GZ+US do oceny prędkości krytycznych dla obciążeń poruszających się (nie tylko) po mostach. Wartości takich prędkości zależą od wielkości poruszającej się masy oraz rozpiętości i masy samego mostu. Barierą w planowaniu wielkości zadania (liczby węzłów w CzP) jest zdolność komputera do pamiętania dużych liczb.

LITERATURA

1. Büttner O., Stenker H. "*Metalleichtbauten. Band 1. Ebene Raumstabwerke*". Berlin: VEB Verlag für Bauwesen, 1970. *„Lekkie konstrukcje metalowe"*. Warszawa: Arkady,1974.
2. Gutkowski W., Obrębski J.B., Bauer J., Gierliński J., Rączka J., Żmijewski K. *„Obliczenia statyczne przekryć strukturalnych"*. Warszawa: Arkady, 1980. *„Statische Berechnung der Raumstabwerke*". Warszawa: Werner Verlag/Arkady, 1985 (tłum. książki z 1980 r.).
3. Kaliski S. i in. *„Drgania i fale"*. Warszawa: PWN, 1966.
4. Kączkowski Z. "The method of finite space-time elements in dynamics of structures". *Journal of Technical Physics.* 16, 1 (1975): s. 69–84.
5. Kączkowski Z. „Metoda czasoprzestrzennych elementów skończonych". *Arch. Inż. Ląd.* 22, 3 (1976): s. 365–378.
6. Kączkowski Z. „Niesprzężone układy równań w metodzie elementów czasoprzestrzennych (MECZ)". *Arch. Inż. Ląd.* 32, 1 (1986): s. 39–50.
7. Nowacki W. *„Mechanika budowli"*. Warszawa: PWN, 1957.
8. Obrębski J.B. *„Analiza i synteza numeryczna wielkich układów konstrukcyjnych*". Rozprawa habilitacyjna. Prace IPPT PAN. Warszawa, 1979.
9. Obrębski J.B. *„Cienkościenne sprężyste pręty proste"*. Skrypt WPW. Warszawa, 1991: s. 452. Drugie wydanie: Warszawa: Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 1999: s. 455.
10. Obrębski J.B. *„Wytrzymałość materiałów"*. Skrypt PW. Warszawa: Micro-Publisher J.B. Obrębski Wyd. Nauk., 1997.
11. Obrębski J.B. "Uniform criterion for geometrical unchangeability and for instability of structures". *Proc. of the International Conference on "Stability of Structures"*, Zakopane, 1997.
12. Obrębski J.B, Szmit R. "Dynamics and dynamical stability of tall buildings". *International Conference "ICSSD"*, Taipei, Taiwan, 2000: s. 85–94.
13. Obrębski J.B. "Examples of some parameters influence on bridges behaviour under moving loadings". *2nd International Conference on Structural Engineering, Mechanics and Computation*, Cape Town, South Africa, A.A. Balkema Publish. Leiden/London/New York/Philadelphia/Singapore. Abstracts vol. p. 171, CD (2004): s. 859–864.
14. Obrębski J.B. "Multi parametrical instability of straight bars". *IASS-IACM 6th International Conference on Computation of Shell & Spatial Structures*, Ithaca, USA, Cornell University, 2008.
15. Obrębski J.B. „Przykłady wieloparametrowej utraty stateczności prętów prostych". *„XVIII Międzynarodowa Szkoła Komputerowego Wspomagania Projektowania, Wytwarzania i Eksploatacji"*, Szczyrk 2014, t. 2: s. 125–142. *Mechanik.* 87, 7 (2014) +CD.
16. Obrębski J.B. „Stateczność prętów prostych w świetle obliczonych przykładów*". „XIX Międzynarodowa Szkoła Komputerowego Wspomagania Projektowania, Wytwarzania i Eksploatacji"*, Jurata 2015, t. 2: s.105–122. *Mechanik.* 88, 7 (2015) +CD.
17. Obrębski J.B. „Czasoprzestrzeń w analizie dynamicznej mostów". *„XXI Międzynarodowa Szkoła Komputerowego Wspomagania Projektowania, Wytwarzania i Eksploatacji"*, Jurata 2017, t. 2: s. 91–102. *„Problems of Mechatronics, Armament, Aviation, Safetyengineering*". Quarterly VII-IX 2017, 8, 3, 29 (2017): s.109–126.
18. Obrębski J.B. „Analiza stanów krytycznych mostu w czasoprzestrzeni". *„XXII Międzynarodowa Szkoła Komputerowego Wspomagania Projektowania, Wytwarzania i Eksploatacji*", Warszawa/Pisz 2018: s. 291–305.
19. Osiński Z. *„Tłumienie drgań mechanicznych"*. Warszawa: PWN, 1979.
20. Szmit R. *„Pręt kompozytowy jako model obliczeniowy budynku wysokiego*". Rozprawa Doktorska. Promotor: J.B. Obrębski. Warszawa, 2001.