

Adaptacyjna analiza struktur o złożonym opisie geometrycznym i mechanicznym z wykorzystaniem przejściowych elementów skończonych

Adaptive analysis of structures of complex geometrical and mechanical description with use of the transition finite elements

MAGDALENA ZIELIŃSKA
GRZEGORZ ZBOIŃSKI*

DOI: <https://doi.org/10.17814/mechanik.2018.7.87>

Praca dotyczy włączenia przejściowych elementów w adaptacyjną analizę struktur o złożonym opisie mechanicznym i geometrycznym. Artykuł odnosi się do wpływu modyfikacji modelu przejściowego na rozwiązanie numeryczne. Analizowana jest również zdolność do usuwania wewnętrznej warstwy brzegowej oraz efektywność szacowania błędów i procesu adaptacji. **SŁOWA KLUCZOWE:** elementy przejściowe, adaptacja, metoda elementów skończonych, zbieżność

This work concerns inclusion of the transition finite elements in adaptive analysis of structures of complex mechanical and geometrical description. The paper addresses the influence of modifications of the transition model on the numerical solution. The ability to remove the internal boundary layer and the effectivity of error estimation and adaptation are analyzed.

KEYWORDS: transition elements, adaptivity, finite element method, convergence

Badania dotyczą adaptacyjnej analizy struktur złożonych. Są to struktury o złożonym opisie mechanicznym i geometrycznym. Złożoność geometryczna polega na występowaniu części geometrycznych o różnych kształtach (bryłowych, grubo- i cienkościennych oraz przejściowych). Części bryłowe to fragmenty rozbudowane przestrzennie. Części powłokowe to fragmenty, w których dwa wymiary wzdłużne są zdecydowanie większe niż trzeci wymiar – poprzeczny. Części przejściowe mają kształt, który umożliwia połączenie części bryłowych z powłokowymi.

Złożoność mechaniczna, rozumiana jako złożoność modelu mechanicznego, dotyczy struktury, do której opisu wykorzystuje się więcej niż jeden model. Modele mechaniczne, które stanowią podstawę rozważań, to: model trójwymiarowej teorii sprężystości (3D), model powłokowy pierwszego rzędu (RM) oraz modele przejściowe (TR). Te ostatnie modele pozwalają na łączenie teorii trójwymiarowej z modelami powłokowymi pierwszego rzędu.

W przypadku ogólnym podział struktury na części geometryczne nie musi się pokrywać z obszarami opisanymi różnymi modelami mechanicznymi [1, 2]. Oznacza to, że w części powłokowej może być zastosowany zarówno model powłokowy pierwszego rzędu, jak i model trójwymiarowej teorii sprężystości, a w części o geometrii przejściowej – model przejściowy lub model trójwymiarowy. Natomiast część bryłowa wymaga zastosowania modelu trójwymiarowej teorii sprężystości.

Modele zastosowane w niniejszej pracy mają charakter adaptacyjny. Adaptacja typu p jest w nich możliwa dzięki zastosowaniu tzw. aproksymacji hierarchicznych i odpowiadających im funkcji kształtu o charakterze przyrostowym, zdefiniowanym niezależnie w wierzchołkach, na krawędziach i na ścianach elementów. Z kolei adaptację typu h umożliwia zastosowanie tzw. aproksymacji z więzami. Zmiany modelu zakodowanego w elemencie są możliwe dzięki wprowadzeniu aproksymacji hierarchicznych o mieszanym dwuwymiarowo-trójwymiarowym charakterze. Szczegóły dotyczące wszystkich zastosowanych aproksymacji są podane w pracy [1].

Modele przejściowe

Rozpatrzone w niniejszej pracy modele przejściowe i adaptacyjne elementy skończone mogą mieć charakter bryłowo-powłokowy lub hierarchiczno-powłokowy. W pierwszym przypadku służą one do łączenia modelu trójwymiarowej teorii sprężystości z modelem powłokowym pierwszego rzędu. Natomiast w drugim przypadku wykorzystuje się je do łączenia hierarchicznych modeli powłokowych z elementami powłokowymi pierwszego rzędu. W obu zastosowaniach struktura i algorytm elementu są takie same.

Klasyczny model przejściowy pozwala na łączenie elementów opisanych trójwymiarową teorią sprężystości i elementów odpowiadających teorii powłokowej pierwszego rzędu Reissnera-Mindlina. Uzyskuje się wówczas ciągłość odkształceń między modelami podstawowymi, jednak z wysokimi gradientami na granicy między modelem przejściowym (TR) i powłokowym (RM). Model klasyczny nie pozwala na uzyskanie ciągłości naprężeń na tej granicy. Szczegóły dotyczące algorytmu oraz badań numerycznych tego modelu i elementu obszernie przedstawiono w pracach [1, 3].

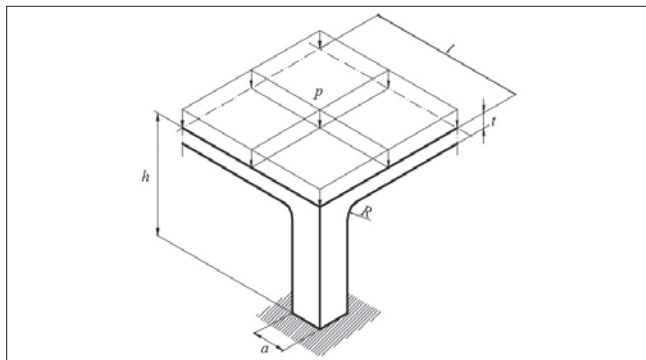
W trakcie badań zaproponowano modyfikację modelu przejściowego [4]. Zmodyfikowany model nadal gwarantował ciągłość poprzecznych odkształceń na granicy modelu przejściowego, niestety z wysokimi gradientami w miejscu połączenia modeli TR i RM. Zmiany pozwoliły na uzyskanie ciągłości w polu naprężeń. Polegały one na wprowadzeniu do algorytmu obliczeniowego korygującej funkcji przejścia. Zmiany zostały dokładnie opisane w pracy [5].

W ostatnim, najbardziej zaawansowanym modelu przejściowym, zaprezentowanym w pracy [6], utrzymano ciągłość naprężeń na granicy modeli. Dodatkowo założono ciągłą zmianę kinematycznych założeń teorii Reissnera-Mindlina w strefie przejściowej. Wprowadzone zmiany bardzo dokładnie zostały opisane w pracy [7].

* Dr inż. Magdalena Zielińska (m.nosarzewska@uwm.edu.pl) – Katedra Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn, Wydział Nauk Technicznych, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie; prof. dr hab. inż. Grzegorz Zboiński (zboi@imp.gda.pl) – Instytut Maszyn Przepływowych PAN w Gdańsku

Badania numeryczne

Struktura analizowana w pracy to symetryczna ćwiartka płyty wspartej na czterech masywnych słupach prostokątnych (rys. 1). Struktura ta może reprezentować fragment konstrukcji nośnej. Składa się ona z części bryłowej (słupa), powłokowej (płyty) oraz przejściowej (połączenia płyty i słupa).

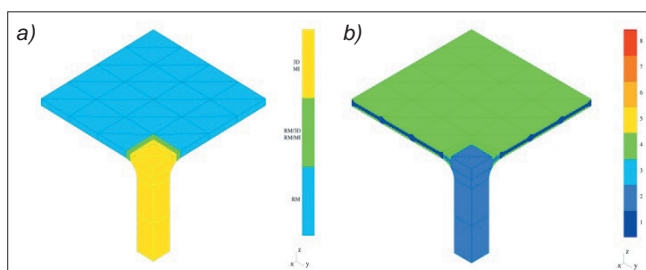


Rys. 1. Symetryczna ćwiartka konstrukcji płytowej podpartej czterema słupami

Przyjęto następujące wymiary wzdłużne struktury: $l = 4,1415$ m, grubość $t = 0,1$ m. Wysokość słupa wraz z płytą wynosi $h = 1,4$ m, a szerokość kwadratowego przekroju słupa $a = 0,3$ m. Część przejściowa pomiędzy słupem i płytą jest ograniczona ćwiartką okręgu o promieniu $R = 0,2$ m. Do części cienkościennej struktury przyłożone jest równomierne, normalne obciążenie ciągłe o wartości $p = 4 \cdot 10^6$ N/m². Dolny koniec słupa jest utwierdzony. Przyjęto, że wszystkie części analizowanej konstrukcji są wykonane z materiału sprężystego o module Younga $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ N/m² oraz współczynnika Poissona $\nu = 0,3$.

Zastosowanie elementów przejściowych w adaptacyjnej analizie struktur złożonych

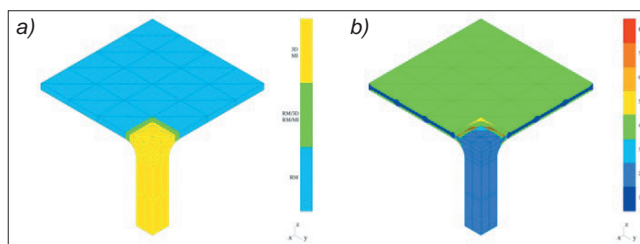
Przeprowadzona zostanie ocena zdolności zastosowanych elementów przejściowych do usuwania wewnętrznej warstwy brzegowej.



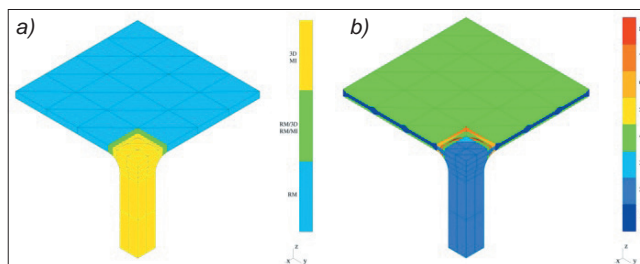
Rys. 2. Symetryczna ćwiartka konstrukcji nośnej – siatka początkowa procesu adaptacji: a) modele, b) stopnie aproksymacji

Zastosowane modele oraz podział struktury przedstawiono na: rys. 2 – siatkę i modele początkowe w obu analizowanych wariantach elementów przejściowych, rys. 3–4 – siatki i modele końcowe.

■ **Zdolność do usuwania wewnętrznej warstwy brzegowej.** Analizując wyniki badań numerycznych, można zaobserwować większą zdolność modelu udoskonalonego do usuwania wewnętrznej warstwy brzegowej niż modelu klasycznego. W tej samej mierze dotyczy to siatek początkowych i końcowych. Potwierdzają to rys. 5 i 6.



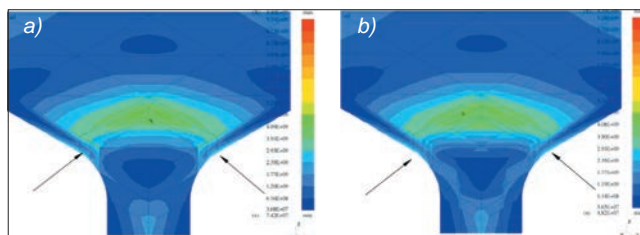
Rys. 3. Siatka końcowa procesu adaptacji – klasyczny model przejściowy: a) modele, b) stopnie aproksymacji



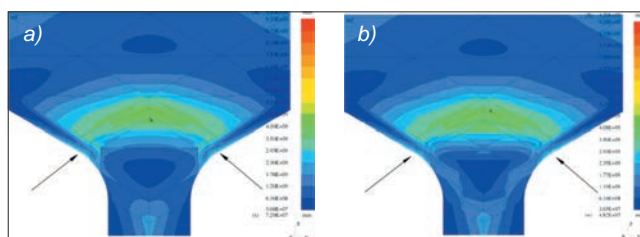
Rys. 4. Siatka końcowa procesu adaptacji – udoskonalony model przejściowy: a) modele, b) stopnie aproksymacji

Pierwszy z rysunków (rys. 5a) ujawnia występowanie wewnętrznej warstwy brzegowej na granicy modelu powłokowego i klasycznego modelu przejściowego w siatce początkowej. Wyraźna granica pomiędzy tymi modelami występuje także w przypadku siatki końcowej (rys. 5b). Z kolei zastosowanie przejściowego modelu udoskonalonego na siatce początkowej (rys. 6a) powoduje zniknięcie wyraźnej granicy wymienionymi modelami. Ma to miejsce także w siatce końcowej (rys. 6b).

Odnosząc się do wszystkich rysunków, należy zauważyć, że ujawniają one także skoki w rozkładach naprężeń wywołane dyskretyzacją, np. na granicy słupa i części cienkościennej (rys. 5 w sąsiedztwie punktu o minimalnej wartości naprężeń na siatce początkowej, oznaczonego symbolem x).



Rys. 5. Naprężenia efektywne – klasyczny model przejściowy: a) siatka początkowa, b) siatka końcowa

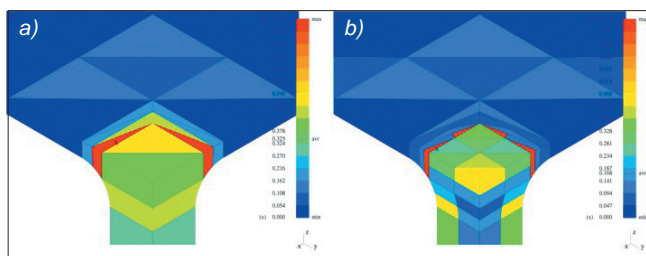


Rys. 6. Naprężenia efektywne – udoskonalony model przejściowy: a) siatka początkowa, b) siatka końcowa

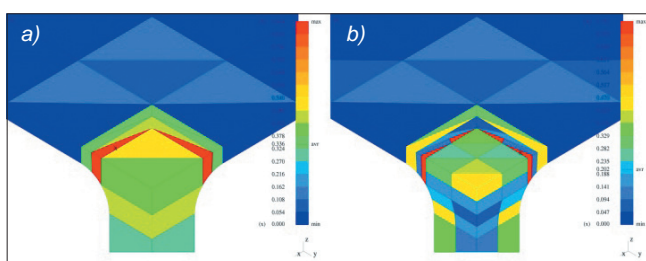
■ **Zbieżność procesu adaptacji.** Efektywność procesu adaptacji oceniono na podstawie rezultatów otrzymanych w trójfazowym procesie adaptacji typu *hp*. Prowadzono go przy założeniu dopuszczalnej wartości błędu docelowego na siatkach końcowych $\gamma_T = 0,05$. Wartość stosunku

oszacowań błędu z siatki pośredniej i błędu z siatki końcowej przyjęto $\gamma_I/\gamma_T = 2,0$.

Na rys. 7 pokazano wartości względne lokalnych i globalnych oszacowań błędów aproksymacji w przypadku zastosowania w strefie przejściowej elementów klasycznych. Poziom oszacowanego błędu globalnego na siatce początkowej $avr = 0,325$, natomiast na siatce końcowej $avr = 0,168$.



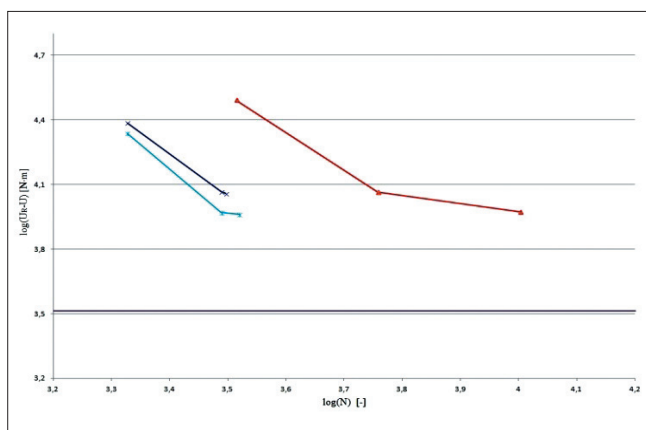
Rys. 7. Błąd aproksymacji – klasyczny model przejściowy: a) siatka początkowa, b) siatka końcowa



Rys. 8. Błąd aproksymacji – udoskonalony model przejściowy: a) siatka początkowa, b) siatka końcowa

Z rys. 8 wynika, że analogiczne wartości, w przypadku modelu uwzględniającego udoskonalony element przejściowy, wynoszą: $avr = 0,336$ na siatce początkowej i $avr = 0,202$ na siatce końcowej. Uzyskane wyniki dotyczą siatki różniącej się od otrzymanej w przypadku zastosowania klasycznego elementu przejściowego.

Przedstawionemu procesowi adaptacji, sterowanemu oszacowanymi wartościami błędów z rys. 7–8, odpowiadają krzywe zbieżności przedstawiające poziom błędu rzeczywistego w funkcji rosnącej liczby stopni swobody (rys. 9). Krzywa zbieżności odpowiadająca zastosowaniu klasycznego elementu przejściowego ma kolor granatowy. Krzywa odnosząca się do zastosowania elementu udoskonalonego jest jasnoniebieska.



Rys. 9. Krzywe zbieżności – jednakowa siatka początkowa, różny poziomy błędu docelowego

Efektywniejsze zmniejszanie poziomu błędu rzeczywistego wynika z wyższego poziomu oszacowań błędów w przypadku zastosowania elementu udoskonalonego.

Z krzywymi uzyskanymi dla struktur złożonych można porównać krzywą koloru czerwonego, odpowiadającą modelowi całkowicie trójwymiarowemu. Model trójwymiarowy wymaga dużo większej niż oba modele złożone liczby stopni swobody, aby uzyskać ten sam lub zbliżony poziom błędu globalnego.

Ten przykład pokazuje wyższość modeli złożonych, uwzględniających elementy powłokowe i elementy przejściowe, nad analizą za pomocą elementów trójwymiarowych. Przyczyną jest tutaj zjawisko warstwy brzegowej występujące w częściach cienkościennych, modelowanych za pomocą hierarchicznych modeli powłokowych.

Podsumowanie

Rozpatrując efektywność procesu adaptacji w zadaniu struktury odpowiadającej konstrukcji nośnej, należy zauważyć, że uzyskanie tego samego poziomu błędów z modelu podstawowego i modelu złożonego z udziałem przejściowego elementu udoskonalonego wymaga w tym drugim przypadku mniejszej liczby stopni swobody. W zadaniu dotyczącym konstrukcji nośnej liczba stopni swobody modeli złożonych była znacznie mniejsza niż w przypadku modelu trójwymiarowego.

Doskonale uzasadnia to stosowanie modeli złożonych zamiast modelu podstawowego trójwymiarowej teorii sprężystości, jeśli za kryterium przyjmie się wyłącznie poziom błędu aproksymacji.

LITERATURA

- Zboiński G. „Modelowanie hierarchiczne i metoda elementów skończonych do adaptacyjnej analizy struktur złożonych”. *Zeszyty naukowe IMP PAN w Gdańsku. Studia i materiały*. Gdańsk: Instytut Maszyn Przepływowych PAN, 2001.
- Zboiński G. “Unresolved problems of adaptive hierarchical modelling and hp-adaptive analysis within computational solid mechanics” [w:] M. Kuczma, K. Wilmański (red.). *Computer Methods in Mechanics – Lectures of the CMM 2009. Seria: Advanced Structural Materials*. T. 1, s. 113–147. Berlin: Springer Verlag, 2010.
- Nosarzewska M. „Zastosowanie elementów przejściowych w adaptacyjnej analizie struktur sprężystych”. Praca magisterska, Wydział Nauk Technicznych, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie, 2007.
- Zielińska M., Zboiński G. „Opracowanie efektywnego numerycznie sformułowania adaptacyjnego, opartego na podejściu trójwymiarowym, bryłowo-powłokowego elementu przejściowego zapewniającego ciągłość pola naprężeń pomiędzy modelami podstawowymi”. Raport wewnętrzny. Nr arch. 324/15. Gdańsk: Instytut Maszyn Przepływowych PAN, 2013.
- Nosarzewska M., Zboiński G. „Efektywność przejściowych elementów skończonych w hierarchicznym modelowaniu struktur złożonych”. *Modelowane Inżynierskie*. 7, 38 (2009): s.131–138.
- Zielińska M., Zboiński G. „Analiza płyt i powłok zdominowanych membranowo z ciągłą zmianą naprężeń i okształceń w strefach przejściowych”. *Mechanik*. 87, 7 (2014): s. 855–872, CD.
- Zielińska M., Zboiński G. “hp-Adaptive finite element analysis of thin-walled structures with use of the shell-to-shell transition elements”. *Recent Advances in Computational Mechanics*, s. 63–72. London: CRC Press, 2014.