

Szacowanie niepewności pomiaru parametrów profilu metodą Monte Carlo

Evaluation of measurement uncertainty of profile parameters using a Monte Carlo method

STANISŁAW ADAMCZAK
JACEK ŚWIDERSKI
TOMASZ DOBROWOLSKI
THOMAS G. MATHIA*

DOI: <https://doi.org/10.17814/mechanik.2018.5-6.52>

Przedstawiono zalety zastosowania metody Monte Carlo do szacowania niepewności pomiaru parametrów amplitudowych profilu pierwotnego, otrzymanego na podstawie pomiarów struktury geometrycznej powierzchni.

SŁOWA KLUCZOWE: niepewność pomiaru, metoda Monte Carlo, struktura geometryczna powierzchni

The advantages of the Monte Carlo method for estimating the uncertainty of measurement of the amplitude parameters of the primary profile determined during the measurements of the surface texture are presented.

KEYWORDS: measurement uncertainty, Monte Carlo method, surface texture

Parametry opisujące ilościowo stan powierzchni zostały wprowadzone po to, aby umożliwić porównywanie stanu nierówności różnych powierzchni i weryfikować spełnianie określonych wymagań. W odniesieniu do analizy dwuwymiarowej są one wyznaczane dla różnych składowych profilu nierówności: profilu pierwotnego (P), profilu falistości (W) oraz profilu chropowatości (R).

Niezbędnym elementem wyniku pomiaru, który pozwala na orzekanie o zgodności ze specyfikacją czy też potwierdzenie hipotez naukowych, jest jego niepewność.

Podstawowe algorytmy szacowania niepewności standardowych oraz niepewności rozszerzonych dla zadanego poziomu ufności są oparte na zaleceniach ogłoszonych przez Międzynarodową Organizację Normalizacyjną ISO w przewodniku: Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM 1995 – polskie tłumaczenie przewodnika wydane przez Główny Urząd Miar w 1999 r.) [1].

Przewodnik dopuszcza szacowanie niepewności metodą A oraz B. W metodzie typu A niepewność pomiaru wyznacza się w oparciu o analizę statystyczną serii powtarzalnych obserwacji, o ile rozrzut wartości pomiarowych jest większy od rozdzielczości przyrządu pomiarowego. Zakłada się przy tym, że wyniki obserwacji reprezentują wartości zmiennej losowej. Aby wyznaczyć metodą typu A składową niepewności, potrzebne są wyniki z pomiarów wykonywanych w warunkach powtarzalności. Metoda typu B jest wykorzystywana we wszystkich innych przypadkach, kiedy nie jest możliwe albo nie jest uzasadnione stosowanie analizy statystycznej wyników obserwacji.

Supplement 1 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement": Propagation of distribution using a Monte Carlo method JCGM 101:2008 zawiera niezbędne informacje dotyczące szacowania niepewności pomiaru

z użyciem metody Monte Carlo (MC), opartej na propagacji wielkości wejściowych [2]. Zasadę stosuje się, gdy model pomiaru zawiera dowolną liczbę wielkości wejściowych i pojedynczą wielkość wyjściową, rozumianą jako wielkość mierzona. Metoda Monte Carlo jest alternatywą dla klasycznego sposobu obliczania niepewności pomiaru wynikającej z prawa jej propagacji, zwłaszcza w sytuacji, gdy nieuzasadniona jest linearyzacja modelu pomiaru, a rozkład związany z wielkością wyjściową jest asymetryczny.

Metoda Monte Carlo opiera się na zasadzie propagacji rozkładów prawdopodobieństwa realizowanej poprzez opracowany model matematyczny pomiaru z użyciem symulacji Monte Carlo. Miarą wyniku pomiaru jest rozkład prawdopodobieństwa związany z wielkością wyjściową, wyznaczany na podstawie rozkładów wielkości wejściowych. Wynik pomiaru jest przedstawiany w postaci parametrów tego rozkładu: wartości oczekiwanej, odchylenia standardowego i kwantyli rozkładu dla określonego prawdopodobieństwa, jako granic przedziału rozszerzenia. Mierzona wielkość jest charakteryzowana przez funkcję gęstości prawdopodobieństwa. Jej wartość oczekiwana jest traktowana jako najlepsza estymata wielkości mierzonej, a odchylenie standardowe – jako niepewność standardowa związana z tą estymatą. Metoda ta może być stosowana w przypadku, gdy ze względu na złożoność modelu pomiaru [3–5] nie są spełnione warunki konieczne do zastosowania prawa propagacji niepewności.

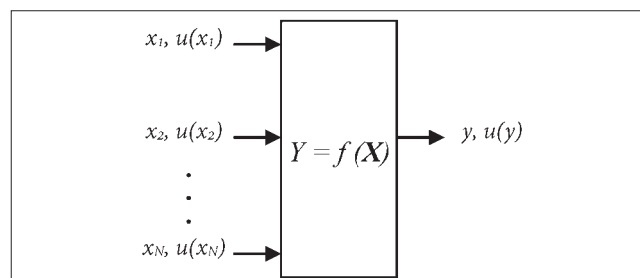
Matematyczny model pomiaru skalarnej wielkości wejściowej może być wyrażony za pomocą zależności:

$$Y = f(\mathbf{X})$$

gdzie: Y – wielkość wyjściowa; \mathbf{X} – wielkość wejściowa reprezentowana przez N wielkości wejściowych $(X_1, \dots, X_N)^T$.

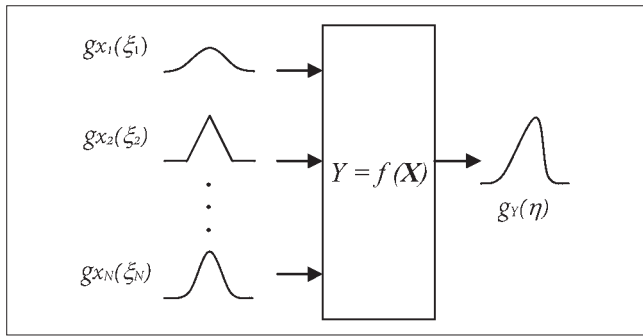
Każda z wielkości wejściowych X_i jest zmienną losową z możliwymi wartościami ξ_i i wartością oczekiwaną x_i . Wielkość wyjściowa Y jest zmienną losową z możliwymi wartościami η i wartością oczekiwaną y .

Na rys. 1 przedstawiono istotę szacowania niepewności zgodną z GUM, opierającą się na zasadzie propagacji niepewności, a na rys. 2 – wykorzystującą symulację MC, opierającą się na zasadzie propagacji rozkładów.



Rys. 1. Istota szacowania niepewności według GUM

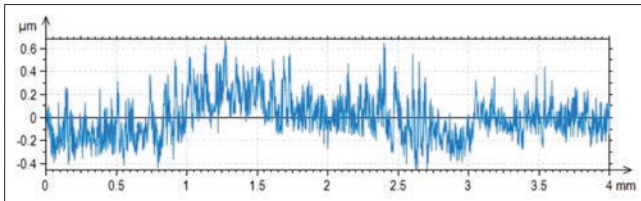
* Prof. dr hab. inż. Stanisław Adamczak (adamczak@tu.kielce.pl), mgr inż. Jacek Świdorski (swiderski@tu.kielce.pl), mgr inż. Tomasz Dobrowolski (t.dobrowolski@tu.kielce.pl) – Wydział Mechatroniki i Budowy Maszyn Politechniki Świętokrzyskiej; dr hab. inż. Thomas G. Mathia (thomas.mathia@ec-lyon.fr) – Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS), Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes (LTDS), École Centrale de Lyon, France



Rys. 2. Istota szacowania niepewności według MC

Analizowany profil

Aby zaprezentować możliwości zastosowania metody MC do szacowania niepewności pomiaru parametrów profilu, wykorzystano profil pierwotny o charakterze losowym, składający się z 2000 punktów (rys. 3).



Rys. 3. Zmierzony profil pierwotny

W ramach metody Monte Carlo stosuje się następujące kroki:

- określenie wielkości wejściowych, od których zależy wielkość wyjściowa pomiaru,
- zdefiniowanie wielkości wyjściowej,
- opracowanie modelu matematycznego określającego relacje pomiędzy wielkościami wejściowymi a wielkością wyjściową pomiaru,
- założenie rozkładów prawdopodobieństwa dla wielkości wejściowych,
- wyznaczenie funkcji gęstości prawdopodobieństwa wielkości wyjściowej poprzez przyjęty model matematyczny, na podstawie rozkładów wielkości wejściowych z użyciem symulacji Monte Carlo,
- wyznaczenie na podstawie rozkładu wielkości wyjściowej: wartości oczekiwanej, stanowiącej estymatę wielkości wyjściowej, odchylenia standardowego jako niepewności standardowej związanej z tą estymatą oraz kwantyle rozkładu dla określonego prawdopodobieństwa.

Wielkościami wejściowymi w przyjętym modelu pomiaru są współrzędne z_i przedstawionego profilu pierwotnego. Wielkością wyjściową jest wartość określonego parametru amplitudowego.

Analizie poddano następujące parametry profilu pierwotnego:

- wysokość najwyższego wzniesienia profilu Pp według wzoru:

$$Pp = \max \{z_1, \dots, z_n\}$$

- głębokość najniższego wgłębienia profilu Pv według wzoru:

$$Pv = \min \{z_1, \dots, z_n\}$$

- średnią arytmetyczną rzędnych profilu Pa określaną ze wzoru:

$$Pa = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |z_i|$$

- średnią kwadratową rzędnych profilu Pq określaną ze wzoru:

$$Pq = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^2}$$

- współczynnik asymetrii profilu Psk określaną ze wzoru:

$$Psk = \frac{1}{(Pq)^3} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^3$$

- współczynnik nachylenia profilu Pku określaną ze wzoru:

$$Pku = \frac{1}{(Pq)^4} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^4$$

gdzie: n – liczba punktów, z_i – rzędna i -tego punktu.

Każda z przedstawionych zależności, określająca parametr profilu, jest jednocześnie modelem matematycznym opisującym relacje pomiędzy wielkościami wejściowymi a wielkością wyjściową pomiaru.

Wynik pomiaru poszczególnych współrzędnych profilu jest obarczony błędami, wynikającymi m.in. z [6, 7]:

- szumu pomiarowego, na który składają się drgania układów mechanicznych profilometru oraz drgania w miejscu zainstalowania urządzenia, które nie zostały wytłumione przez system wibroizolacji przyrządu,
- błędów liniowości czujnika pomiarowego przyrządu,
- błędów prostoliniowości bazy odniesienia profilometru,
- odkształceń sprężystych materiału mierzonego elementu pod wpływem ostrza odwzorowującego,
- błędów próbkowania w osi X ,
- efektu mechanicznego filtrowania nierówności przez wierzchołek ostrza odwzorowującego,
- błędów związanych z kinematyką końcówki pomiarowej, polegających na możliwości utraty kontaktu ostrza odwzorowującego z mierzoną powierzchnią.

Aby zbadać, jaki wpływ na funkcję gęstości prawdopodobieństwa wielkości wyjściowej dla poszczególnych parametrów profilu ma założony rozkład prawdopodobieństwa wielkości wejściowych, przyjęto dwa rodzaje rozkładów prawdopodobieństwa dla wielkości wejściowych:

- rozkład jednostajny (prostokątny) o wartości oczekiwanej równej współrzędnej z_i i -tego punktu i przedziale zmienności $\pm 0,03 \mu\text{m}$,
- rozkład normalny Gaussa o wartości oczekiwanej równej współrzędnej z_i i -tego punktu i odchyleniu standardowym $0,01 \mu\text{m}$.

Tak przyjęte parametry obu rozkładów prawdopodobieństwa zapewniają ten sam zakres zmienności wielkości wejściowych.

Dla wymienionych przypadków przeprowadzono symulację Monte Carlo poprzez wykonanie 1000 razy próbkowania zbioru wielkości wejściowych.

Analiza wyników

Zestawienie wartości parametrów profilu, obliczonych w oparciu o jego zmierzone współrzędne oraz symulację MC dla rozkładu normalnego i równomiernego funkcji gęstości prawdopodobieństwa wielkości wejściowych, przedstawiono w tabl. I.

TABLICA I. Wartości parametrów profilu

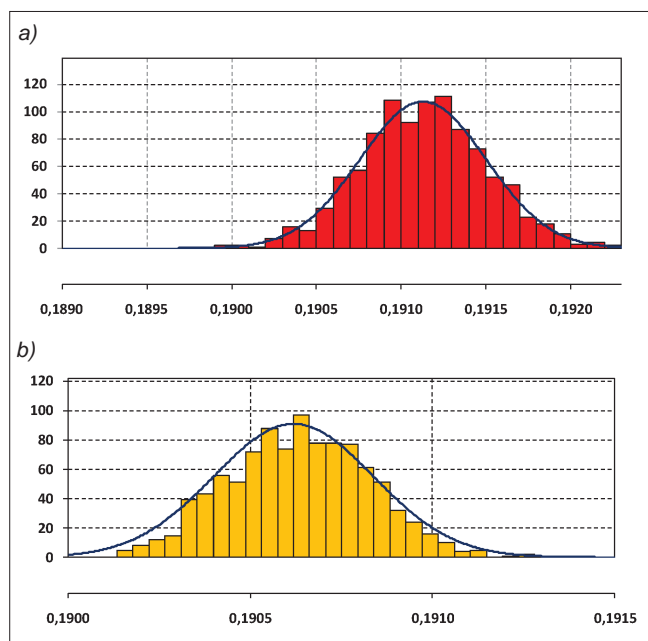
Sposób wyznaczenia	Wartość parametru					
	Pq μm	Pp μm	Pv μm	Pku	Psk	Pa μm
Obliczona z profilu	0,1903	0,685	0,458	3,298	0,514	0,1497
Symulacja MC (rozkład normalny)	0,1906	0,689	0,464	3,296	0,512	0,1499
Symulacja MC (rozkład prostokątny)	0,1911	0,696	0,472	3,292	0,508	0,1503

W tabl. II przedstawiono oszacowane metodą MC wartości niepewności dla założonych rozkładów funkcji gęstości prawdopodobieństwa wielkości wejściowych.

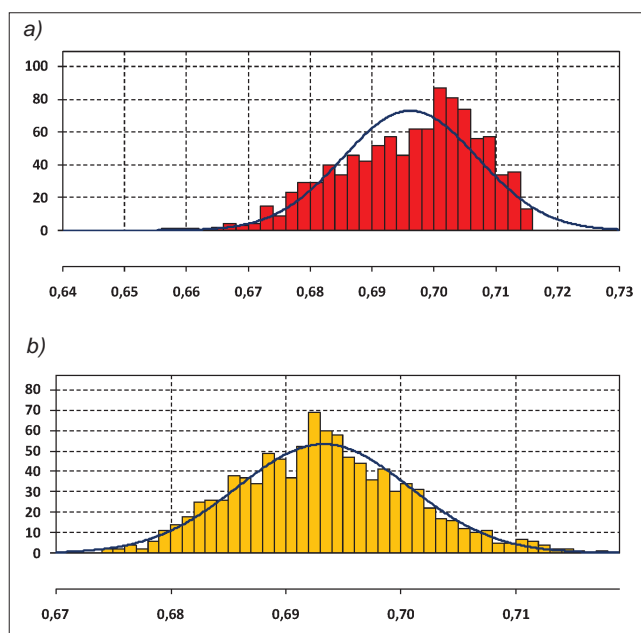
TABLICA II. Niepewność pomiaru parametrów profilu

Sposób wyznaczenia	Niepewność pomiaru parametru					
	Pq nm	Pp nm	Pv nm	Pku	Psk	Pa nm
Symulacja MC (rozkład normalny)	0,4	15	15	0,03	0,01	0,4
Symulacja MC (rozkład prostokątny)	0,4	11	11	0,04	0,02	0,4

Przykładowe otrzymane funkcje gęstości prawdopodobieństwa wielkości wyjściowych Pq i Pp dla obu założonych rozkładów prawdopodobieństwa wielkości wejściowych przedstawiono na rys. 4 i 5.



Rys. 4. Funkcje gęstości prawdopodobieństwa parametru Pq : a) dla rozkładu jednostajnego wielkości wejściowych, b) dla rozkładu normalnego wielkości wejściowych



Rys. 5. Funkcje gęstości prawdopodobieństwa parametru Pp : a) dla rozkładu jednostajnego wielkości wejściowych, b) dla rozkładu normalnego wielkości wejściowych

Podsumowanie

Zastosowanie metody Monte Carlo pozwala na uniknięcie wykonywania skomplikowanych obliczeń pochodnych cząstkowych. Ponadto metoda umożliwia uściślenie wyznaczenia estymaty wielkości wyjściowej dla nieliniowych równań pomiaru oraz niepewności standardowej związanej z tą estymatą. Możliwe jest wyznaczanie przedziału objęcia, odpowiadającego określonemu poziomowi ufności, gdy funkcja gęstości wielkości wyjściowej nie może być przybliżona rozkładem Gaussa lub t-Studenta – co ma miejsce przy dominującej składowej o rozkładzie niegaussowskim lub nieliniowym modelu pomiaru.

Dla założonego prostokątnego rozkładu prawdopodobieństwa wielkości wejściowych funkcje gęstości prawdopodobieństwa wielkości wyjściowych mają charakter rozkładu normalnego, z wyjątkiem rozkładu dla parametrów Pp i Pv .

Publikacja w oparciu o wyniki uzyskane w ramach projektu PBS2 finansowanego przez NCBR (Nr PBS2/A6/20/2013) „Badania i ocena wiarygodności nowoczesnych metod pomiaru topografii powierzchni w skali mikro i nano”.

LITERATURA

- JCGM 100:2008 Evaluation of measurement data. Guide to the expression of uncertainty in measurement.
- JCGM 101:2008 Evaluation of measurement data. Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement”: Propagation of distributions using a Monte Carlo method.
- PN-ISO 3534-1:2009 Statystyka. Słownik i symbole. Część 1: Ogólne terminy statystyczne i terminy wykorzystywane w rachunku prawdopodobieństwa.
- Fotowicz P. „Nowe podejście w dziedzinie wyrażania niepewności pomiaru”. *Pomiary Automatyka Robotyka*. 7–8 (2006): s. 34–37.
- Płowucha W., Jakubiec W., Rosner P. „Szacowanie niepewności pomiaru – metoda Monte Carlo”. *Mechanik*. 12 (2017): s. 1152–1154.
- Wieczorowski M., Gapiński B., Grochalski K., Miller T. „Teoretyczne aspekty analizy wybranych źródeł błędów w profilowych pomiarach nierówności powierzchni”. *Mechanik*. 4 (2017): s. 335–338.
- Adamczak S., Świdorski J., Dobrowolski T. „Wybrane zagadnienia stykowych pomiarów struktury geometrycznej powierzchni”. *Mechanik*. 4 (2017): s. 328–331.