

Dynamika mobilnego robota transportowego

The dynamics of a mobile transport robot

MARCIN SZUSTER
PAWEŁ OBAL*

DOI: <https://doi.org/10.17814/mechanik.2018.5-6.51>

W artykule omówiono konstrukcję mobilnego robota transportowego, mającego formę wózka jezdniowego podnośnikowego, służącego do badań laboratoryjnych metod sterowania złożonymi obiektami dynamicznymi w zmiennych warunkach pracy. Przedstawiono opis dynamiki robota, otrzymany za pomocą równań Lagrange'a drugiego rodzaju z mnożnikami, zmodyfikowany w wyniku zastosowania procedury odsprężania mnożników. Zaprezentowano wyniki rozwiązania zadania odwrotnego dynamiki z wykorzystaniem zadanej trajektorii robota, składającej się z etapów ruchu typowych dla zadań transportowych, realizowanych przez wózki podnośnikowe.
SŁOWA KLUCZOWE: mobilny robot trójkołowy, dynamika mobilnych robotów kołowych

The article presents the construction of a mobile transport robot which is a forklift model, used for laboratory testing of control methods for complex dynamic objects in changing operating conditions. The robot dynamics is calculated using Lagrange equations of the 2nd type with multipliers. The results of solving the inverse dynamics problem were presented using the robot's trajectory which consists of stages of movement typical for transport tasks performed by forklift.

KEYWORDS: 3-wheeled mobile robot, mobile robot dynamics

Synteza wielu typów algorytmów sterowania wymaga znajomości modelu dynamiki sterowanego obiektu [2, 3]. W tym celu stosowane są modele o różnym stopniu złożoności, uwzględniające zazwyczaj najważniejsze zjawiska zachodzące w czasie ruchu obiektu, co upraszcza wykonywanie obliczeń. Znanych jest wiele formalizmów matematycznych, umożliwiających syntezę dynamicznych równań ruchu obiektów mechanicznych [8]. W przypadku mobilnych robotów kołowych, które są układami nieholonomicznymi, często stosuje się równania Lagrange'a drugiego rodzaju z mnożnikami oraz równania Maggiego [3, 4, 7]. Z równań Lagrange'a drugiego rodzaju otrzymuje się dynamiczne równania ruchu, które pozwalają na rozwiązanie prostego i odwrotnego zadania dynamiki. W przeciwieństwie do formalizmu Maggiego ta metoda umożliwia wyznaczenie mnożników Lagrange'a, które w przypadku mobilnych robotów kołowych przyjmują formę wartości sił tarcia suchego, działających w punktach styku kół robota z jezdnią.

W pracy wykorzystano równania Lagrange'a drugiego rodzaju do opisu dynamiki mobilnego robota transportowego. Na podstawie tego opisu przeprowadzono badania symulacyjne.

Konstrukcja mobilnego robota transportowego

Ramę mobilnego robota transportowego (MRT) zbudowano z aluminiowych profili montażowych firmy Bosch Rexroth. Oprócz profili montażowych producent oferuje również różnego rodzaju elementy łączące i podporowe – zarówno sztywne, jak i ruchowe. Wizualizację CAD MRT przedstawiono na rys. 1. MRT składa się z układu jezdniowego oraz zespołu podnośnikowego, umożliwiającego transport ładunków. Układ jezdniowy jest zbudowany z ramy wspartej na dwóch swobodnych kołach przednich i napędzanym kole tylnym, zamontowanym w ruchomym zespole kierowniczym.

Do napędu platformy mobilnej robota zastosowano bezszczotkowe silniki prądu stałego (BLDC) [1]. Ruch podnośnika widłowego zapewniają dwa moduły liniowe firmy WObit, wyposażone w silniki DC. Konstrukcja MRT jest wzorowana na rozwiązaniach trójkołowych wózków podnośnikowych z napędzanym i skrętnym kołem tylnym. Robot umożliwia transport ładunków o masie do 20 kg.

Dynamiczne równania ruchu

Do opisu dynamiki MRT wykorzystano równania Lagrange'a drugiego rodzaju z mnożnikami. Przyjęto model MRT [9] przedstawiony na rys. 2, składający się z: ramy 5, dwóch kół podporowych 1 i 2, koła napędzającego 3 zamocowanego do kierownicy 4 i podnośnika widłowego 6. Koło 3 i kierownica 4 wchodzi w skład zespołu napędowo-kierującego. Zespół ten obraca się względem ramy 5 wokół osi z_4 o kąt φ . Rama opiera się na kołach podporowych 1 i 2, które mogą wykonywać swobodny obrót wokół osi o kierunkach na stałe powiązanych z ramą robota, prostopadłych do płaszczyzny symetrii wzdłużnej ramy. Wszystkie koła wykonano z twardego plastiku powleczonego sztywną gumą. Promienie kół 1 i 2 są takie same ($r_1 = r_2$), natomiast promień r_3 koła 3 jest od nich większy. Przedstawiony model został zredukowany do modelu, w którym koła swobodne 1 i 2 zastąpiono swobodnym kołem zastępczym 1_z . Kąt obrotu koła zastępczego oznaczono



Rys. 1. Wizualizacja modelu CAD mobilnego robota transportowego

* Dr inż. Marcin Szuster (mszuster@prz.edu.pl), mgr inż. Paweł Obal (p.obal@prz.edu.pl) – Katedra Mechaniki Stosowanej i Robotyki, Politechnika Rzeszowska

jako α_z . Ruch robota opisano za pomocą zredukowanej formy równań więzów nieholonomicznych. To umożliwiło wyznaczenie momentów napędzających i mnożników Lagrange'a [3, 5, 6], które stanowią składowe styczne siły reakcji podłoża na koła, czyli siły tarcia suchego w punkcie styku koła zastępczego 1z i koła napędowego 3 z podłożem. Równania mają postać:

$$\begin{aligned} \dot{x}_A - r_z \dot{\alpha}_z \cos \beta &= 0 \\ \dot{y}_A - r_z \dot{\alpha}_z \sin \beta &= 0 \\ \dot{x}_A + l \dot{\beta} \sin \beta - \dot{\alpha}_3 r_3 \cos(\varphi + \beta) &= 0 \\ \dot{y}_A - l \dot{\beta} \cos \beta - \dot{\alpha}_3 r_3 \sin(\varphi + \beta) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie: \dot{x}_A, \dot{y}_A – rzuty wektora prędkości punktu A związanego z ramą MRT, $\dot{\alpha}_z$ – prędkość kątowna swobodnego koła zastępczego, $\dot{\alpha}_3$ – prędkość kątowna koła napędowego, φ – kąt obrotu kierownicy względem ramy robota, β – chwilowy kąt obrotu ramy robota.

Dwa pierwsze równania to rzuty wektora prędkości punktu styku koła zastępczego 1z z jezdnią na osie układu xy. Dwa kolejne to rzuty wektora prędkości punktu styku koła napędowego z jezdnią na osie układu xy. Badana

platforma mobilna robota jest układem o dwóch stopniach swobody, ponieważ dwie zmienne w równaniach są zmiennymi niezależnymi.

Równania Lagrange'a drugiego rodzaju, zastosowane do wyznaczenia dynamicznych równań ruchu układu nieholonomicznego, mają postać:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left(\frac{\partial E}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = \mathbf{Q} + \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \boldsymbol{\lambda} \quad (2)$$

gdzie: $\mathbf{q} = [x_A, y_A, \beta, \alpha_z, \alpha_3, \varphi]^T$ – wektor współrzędnych uogólnionych, E – energia kinetyczna układu, \mathbf{Q} – wektor sił uogólnionych, $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ – jacobian, $\boldsymbol{\lambda}$ – wektor mnożników Lagrange'a.

Energię kinetyczną układu wyznaczono jako sumę energii kinetycznych poszczególnych elementów konstrukcji:

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5 + E_6 \quad (3)$$

Numery indeksów odpowiadają numeracji elementów konstrukcji na rys. 2. Poszczególne równania energii kinetycznej mają postać:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2} m_1 v_B^2 + \frac{1}{2} I_{z1} \dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2} I_{x1} \dot{\beta}^2 \\ E_2 &= \frac{1}{2} m_2 v_C^2 + \frac{1}{2} I_{z2} \dot{\alpha}_2^2 + \frac{1}{2} I_{x2} \dot{\beta}^2 \\ E_3 &= \frac{1}{2} m_3 v_D^2 + \frac{1}{2} I_{z3} \dot{\alpha}_3^2 + \frac{1}{2} I_{x3} (\dot{\beta} + \dot{\varphi})^2 \\ E_4 &= \frac{1}{2} m_4 v_E^2 + \frac{1}{2} I_{z4} (\dot{\beta} + \dot{\varphi})^2 \\ E_5 &= \frac{1}{2} m_5 v_S^2 + \frac{1}{2} I_{z5} \dot{\beta}^2 \\ E_6 &= \frac{1}{2} m_6 v_G^2 + \frac{1}{2} I_{z6} \dot{\beta}^2 \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie: $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6$ – masy poszczególnych brył; $v_B, v_C, v_D, v_E, v_S, v_G$ – wartości wektorów prędkości odpowiednich punktów; $I_{x1}, I_{x2}, I_{x3}, I_{z1}, I_{z2}, I_{z3}, I_{z4}, I_{z5}, I_{z6}$ – masowe momenty bezwładności poszczególnych brył względem odpowiednich osi układów współrzędnych związanych z tymi bryłami.

Zależności opisujące związek prędkości kątownej koła zastępczego 1z z prędkością kół podporowych 1 i 2 wyznaczono z rozkładu prędkości punktów A, B i C:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1 &= \dot{\alpha}_z + \frac{l_1}{r_z} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha}_2 &= \dot{\alpha}_z - \frac{l_1}{r_z} \dot{\beta} \end{aligned} \quad (5)$$

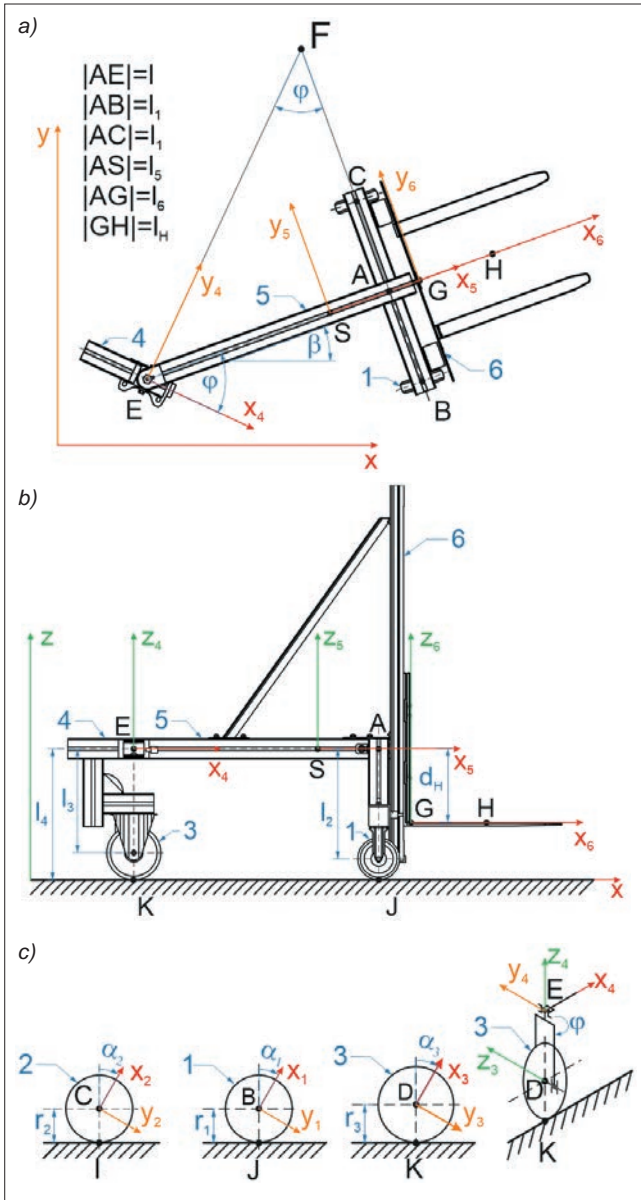
gdzie: $r_1 = r_2 = r_z$ – promienie poszczególnych kół, l_1 – odległość punktów B i C od punktu A.

Równania kinematyczne (1) można zapisać w formie jacobianu:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (6)$$

gdzie:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -r_z \cos \beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -r_z \sin \beta & 0 & 0 \\ 1 & 0 & l \sin \beta & 0 & -r_3 \cos(\beta + \varphi) & 0 \\ 0 & 1 & -l \cos \beta & 0 & -r_3 \sin(\beta + \varphi) & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$



Rys. 2. Schemat MRT: a) widok z góry, b) widok z prawej strony, c) modele kół jezdnych i zespołu napędowo-kierującego

Po wyznaczeniu równań Lagrange'a drugiego rodzaju oraz przeprowadzeniu szeregu operacji i przekształceń matematycznych otrzymano układ różniczkowych równań ruchu modelu MRT:

$$\begin{aligned} & [m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6]\ddot{x}_A + \\ & + (m_1 - m_2)l_1(\cos(\beta)\ddot{\beta} - \sin(\beta)\dot{\beta}^2) + \\ & + [(m_3 + m_4)l + m_5l_3 - m_6l_6](\sin(\beta)\ddot{\beta} + \cos(\beta)\dot{\beta}^2) = \\ & = -\lambda_{z1} + \lambda_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6]\ddot{y}_A + \\ & + (m_1 - m_2)l_1(\sin(\beta)\ddot{\beta} + \cos(\beta)\dot{\beta}^2) + \\ & - [(m_3 + m_4)l + m_5l_3 - m_6l_6](\cos(\beta)\ddot{\beta} - \sin(\beta)\dot{\beta}^2) = \\ & = -\lambda_{z2} + \lambda_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [(m_1 + m_2)l_1^2 + (m_3 + m_4)l^2 + m_5l_5^2 + m_6l_6^2 + I_{x1} + I_{x2} + \\ & + I_{x3} + I_{z4} + I_{z5} + I_{z6} + \frac{l_1^2}{r_z^2}(I_{z1} + I_{z2})]\ddot{\beta} + (I_{x3} + I_{z4})\ddot{\varphi} + \\ & + (I_{z1} - I_{z2})\frac{l_1}{r_z}\ddot{\alpha}_z + (m_1 - m_2)l_1(\ddot{x}_A\cos\beta + \ddot{y}_A\sin\beta) + \\ & - [(m_3 + m_4)l + m_5l_3 - m_6l_6](-\ddot{x}_A\sin\beta + \ddot{y}_A\cos\beta) = \quad (8) \\ & = M_S - M_0\text{sgn}(\dot{\varphi}) + (\lambda_3\sin\beta - \lambda_4\cos\beta)l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (I_{z1} + I_{z2})\ddot{\alpha}_z + (I_{z1} - I_{z2})\frac{l_1}{r_z}\ddot{\beta} = -N_1f_1 - N_2f_2 + \\ & + r_z(\lambda_{z1}\cos\beta + \lambda_{z2}\sin\beta) \end{aligned}$$

$$I_{z3}\ddot{\alpha}_3 = M_N - N_3f_3 - \lambda_3r_3\cos(\beta + \varphi) - \lambda_4r_3\sin(\beta + \varphi)$$

$$(I_{x3} + I_{z4})(\ddot{\beta} + \ddot{\varphi}) = M_S - M_0\text{sgn}(\dot{\varphi})$$

gdzie: $\lambda_{z1}, \lambda_{z2}, \lambda_3, \lambda_4$ – mnożniki Lagrange'a, będące odpowiednikami składowych sił tarcia suchego w punkcie styku koła zastępczego z podłożem na kierunkach osi $x(\lambda_{z1})$ i $y(\lambda_{z2})$ oraz w punkcie styku koła napędowego z podłożem na kierunkach osi $x(\lambda_3)$ i $y(\lambda_4)$; M_N – moment napędowy koła 3; M_S – moment napędowy kierownicy 4; M_0 – moment oporów ruchu koła 3; N_1, N_2, N_3 – siły nacisku poszczególnych kół; $r_1 = r_2 = r_z$ oraz r_3 – promienie poszczególnych kół; $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6$ – długości wynikające z geometrii MRT.

Następnie zastosowano procedurę odsprężnienia mnożników Lagrange'a [3] z układu równań (8). Otrzymano formę równań wygodną do rozwiązywania zadania prostego i odwrotnego dynamiki, bez konieczności wyznaczania wartości mnożników Lagrange'a. Równania po odsprężnieniu mnożników Lagrange'a mają postać:

$$\begin{aligned} & [(a_1 + a_5)\cos^2\varphi + a_2\sin^2\varphi + \\ & - 2(a_3 + a_4)\sin\varphi\cos\varphi + a_8]\ddot{\alpha}_3 - a_6\sin(\varphi)\ddot{\varphi} + \\ & + [(-a_1 + a_2 - a_5)\sin\varphi\cos(\varphi)\dot{\varphi} + \\ & + (a_3 + a_4)(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)\dot{\varphi}]\dot{\alpha}_3 = \\ & = M_N + \frac{r_3}{l}(-M_S + a_9\text{sgn}(\dot{\varphi}))\sin\varphi + \\ & - a_{10}\text{sgn}(\dot{\alpha}_3) - a_{11}\cos\varphi\text{sgn}(\dot{\alpha}_3) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r_3}a_6\ddot{\varphi} - a_6\sin(\varphi)\ddot{\alpha}_3 - a_6\cos(\varphi)\dot{\varphi}\dot{\alpha}_3 = \\ & = M_S - a_9\text{sgn}(\dot{\varphi}) \end{aligned} \quad (10)$$

Wartości wektora parametrów \mathbf{a} wynoszą:

$$\begin{aligned} a_1 & = [m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6]r_3^2 \\ a_2 & = [(m_1 + m_2)l_1^2 + (m_3 + m_4)l^2 + m_5l_5^2 + m_6l_6^2 + \\ & + I_{x1} + I_{x2} + I_{x3} + I_{z4} + I_{z5} + I_{z6} + \frac{l_1^2}{r_z^2}(I_{z1} + I_{z2})]\frac{r_3^2}{l^2} \\ a_3 & = (m_1 - m_2)\frac{l_1r_3^2}{l} \\ a_4 & = (I_{z1} - I_{z2})\frac{l_1r_3^2}{lr_z^2} \\ a_5 & = (I_{z1} + I_{z2})\frac{r_3^2}{r_z^2} \\ a_6 & = (I_{x3} + I_{z4})\frac{r_3}{l} \\ a_7 & = [(m_3 + m_4)l + m_5l_5 - m_6l_6]\frac{r_3^3}{l^2} \\ a_8 & = I_{z3} \\ a_9 & = M_0 \\ a_{10} & = N_3f_3 \\ a_{11} & = \frac{r_3}{r_z}(N_1f_1 + N_2f_2) \end{aligned} \quad (11)$$

Założono, że koła podporowe 1 i 2 są takie same, więc:

$$m_1 = m_2, I_{x1} = I_{x2}, I_{y1} = I_{y2}, I_{z1} = I_{z2} \quad (12)$$

$$a_3 = 0, a_4 = 0 \quad (13)$$

Układ równań (9) i (10) można przedstawić w formie macierzowej:

$$\mathbf{M}_{22}(\mathbf{q}_2)\ddot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{C}_{22}(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2)\dot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{F}_{22}(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2) = \mathbf{B}_2(\mathbf{q}_2)\boldsymbol{\tau} \quad (14)$$

Macierze $\mathbf{M}_{22}(\mathbf{q}_2)$, $\mathbf{C}_{22}(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2)$, $\mathbf{F}_{22}(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2)$ i $\mathbf{B}_2(\mathbf{q}_2)$ przyjmują formę:

$$\mathbf{M}_{22}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} (a_1 + a_5)\cos^2\varphi + a_2\sin^2\varphi + & -a_6\sin\varphi \\ -2(a_3 + a_4)\sin\varphi\cos\varphi + a_8 & \\ -a_6\sin\varphi & \frac{l}{r_3}a_6 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{C}_{22}(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2) = \begin{bmatrix} (-a_1 + a_2 - a_5)\sin\varphi\cos(\varphi)\dot{\varphi} + & 0 \\ + (a_3 + a_4)(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)\dot{\varphi} & \\ -a_6\cos(\varphi)\dot{\varphi} & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\mathbf{F}_{22}(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2) = \quad (17)$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{r_3}{l}a_9\text{sgn}(\dot{\varphi})\sin(\varphi) & a_{10}\text{sgn}(\dot{\alpha}_3) & a_{11}\cos(\varphi)\text{sgn}(\dot{\alpha}_3) \\ a_9\text{sgn}(\dot{\varphi}) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2(\mathbf{q}_2) = \quad (18)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{r_3}{l}\sin\varphi & \frac{r_3}{l}a_9\text{sgn}(\dot{\varphi})\sin\varphi & -a_{10}\text{sgn}(\dot{\alpha}_3) & a_{11}\cos\varphi\text{sgn}(\dot{\alpha}_3) \\ 0 & 1 & -a_9\text{sgn}(\dot{\varphi}) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Otrzymane dynamiczne równania ruchu MRT (14) z odsprężnionymi mnożnikami Lagrange'a – podobnie jak dynamiczne równania ruchu (8) – spełniają wszystkie właściwości strukturalne modeli matematycznych mobilnych robotów kołowych:

- **właściwość I:** uogólniona macierz bezwładności $\mathbf{M}_{22}(\mathbf{q}_2)$ to macierz symetryczna, dodatnio określona;
- **właściwość II:** macierz:

$$\mathbf{S}_{22}(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2) = \dot{\mathbf{M}}_{22}(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2) - 2\mathbf{C}_{22}(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2) = \begin{bmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} \\ S_{2,1} & S_{2,2} \end{bmatrix} \quad (19)$$

jest macierzą skośnie symetryczną; jej elementy spełniają zależności $S_{22i,j} = 0$ dla $i = j$, w przeciwnym razie $S_{22i,j} = -S_{22j,i}$;

- **właściwość III:** dynamiczne równania ruchu MRT w zredukowanych współrzędnych są liniowe ze względu na wektor \mathbf{a} , więc układ równań (14) można zapisać w formie:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{22}(\mathbf{q}_2)\ddot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{C}_{22}(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2)\dot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{F}_{22}(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2) &= \\ = \mathbf{B}_{22}(\mathbf{q}_2)\boldsymbol{\tau}_2 = \mathbf{u} = \mathbf{Y}_{22}(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2, \ddot{\mathbf{q}}_2)\mathbf{a} \end{aligned} \quad (20)$$

gdzie $\mathbf{Y}_{22}(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2, \ddot{\mathbf{q}}_2)$ jest tzw. macierzą regresji.

Badania symulacyjne

Przeprowadzono badania symulacyjne, pozwalające na rozwiązanie zadania prostego i odwrotnego dynamiki MRT z wykorzystaniem otrzymanego modelu dynamiki obiektu. Symulacje przeprowadzono w środowisku obliczeniowym MATLAB/SIMULINK. Uwzględniono zadaną trajektorię punktu A robota (rys. 3). Przebiegi wartości sygnałów sterujących otrzymano dzięki rozwiązaniu zadania odwrotnego dynamiki MRT, z zastosowaniem dynamicznych równań ruchu (20), zapisanych w następującej formie:

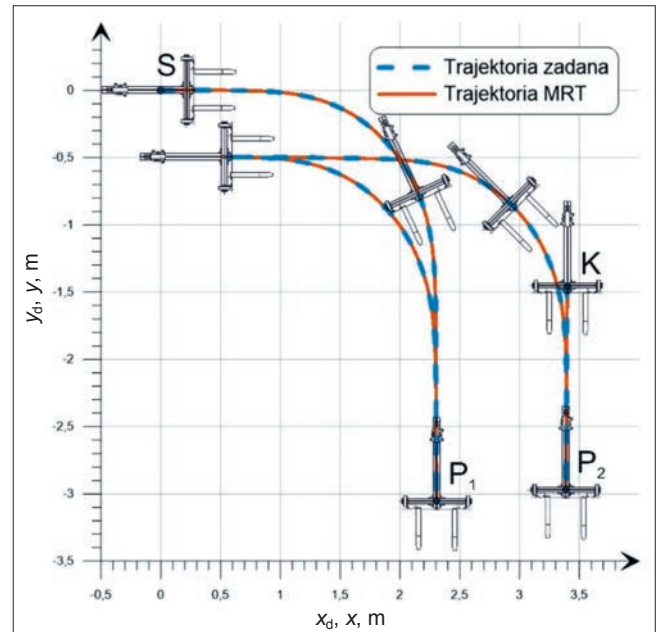
$$\begin{aligned} M_N = & [(p_1 + p_3)\cos^2\varphi + p_2\sin^2\varphi + p_5]\ddot{\alpha}_3 - p_4\sin(\varphi)\ddot{\varphi} + \\ & + [(-p_1 + p_2 - p_3)\sin\varphi \cos(\varphi)\dot{\varphi}]\dot{\alpha}_3 + \quad (21) \\ & - \frac{r_3}{l}(-M_S + p_6\text{sgn}(\dot{\varphi}))\sin\varphi + p_7\text{sgn}(\dot{\alpha}_3) + p_8\cos\varphi \text{sgn}(\dot{\alpha}_3) \end{aligned}$$

$$M_S = \frac{l}{r_3}p_4\ddot{\varphi} - p_4\sin(\varphi)\ddot{\alpha}_3 - p_4\cos(\varphi)\dot{\varphi}\dot{\alpha}_3 + p_6\text{sgn}(\dot{\varphi}) \quad (22)$$

gdzie wartości parametrów modelu, wyznaczone na podstawie analizy modelu CAD robota oraz na podstawie pomiarów sił tarcia i nacisku, wynoszą:

$$\begin{aligned} p_1 = a_1 &= 0,287 \text{ kgm}^2 \\ p_2 = a_2 &= 0,120 \text{ kgm}^2 \\ p_3 = a_5 &= 0,002 \text{ kgm}^2 \\ p_4 = a_6 &= 0,015 \text{ kgm}^2 \\ p_5 = a_8 &= 0,002 \text{ kgm}^2 \\ p_6 = a_9 &= 1,438 \text{ Nm} \\ p_7 = a_{10} &= 0,832 \text{ Nm} \\ p_8 = a_{11} &= 0,656 \text{ Nm} \end{aligned} \quad (23)$$

Przebiegi wartości sygnałów sterujących uzyskano dzięki rozwiązaniu zadania odwrotnego dynamiki MRT, z zastosowaniem dynamicznych równań ruchu (20), zapisanych w formie:



Rys. 3. Trajektorie punktu A robota – zadana oraz otrzymana z rozwiązania zadania prostego dynamiki

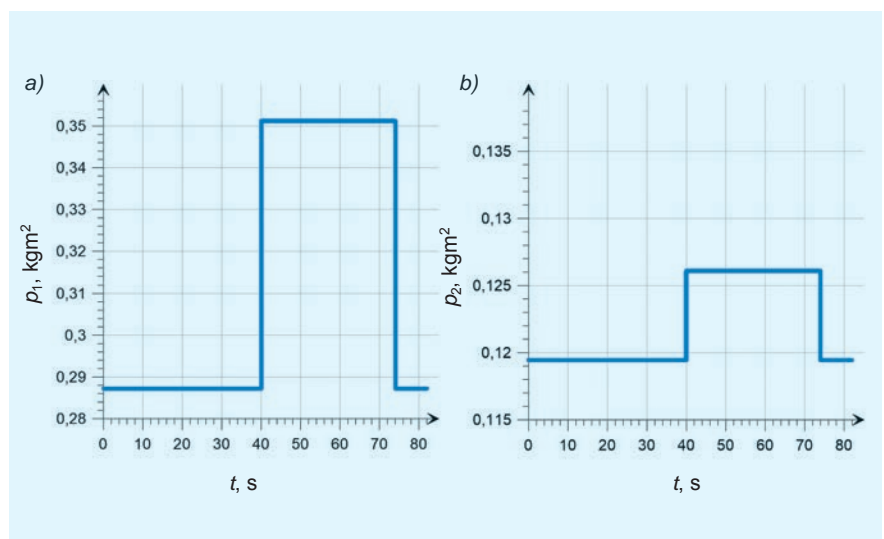
$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{M}_{22}^{-1}(\mathbf{q}_2)[\mathbf{B}_{22}(\mathbf{q}_2)\boldsymbol{\tau}_2 + \\ - \mathbf{C}_{22}(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2)\dot{\mathbf{q}}_2 - \mathbf{F}_{22}(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2)] \end{aligned} \quad (24)$$

Aby zasymulować zmianę ładunku transportowanego przez robota, założono, że parametry p_1 i p_2 zmieniają się następująco:

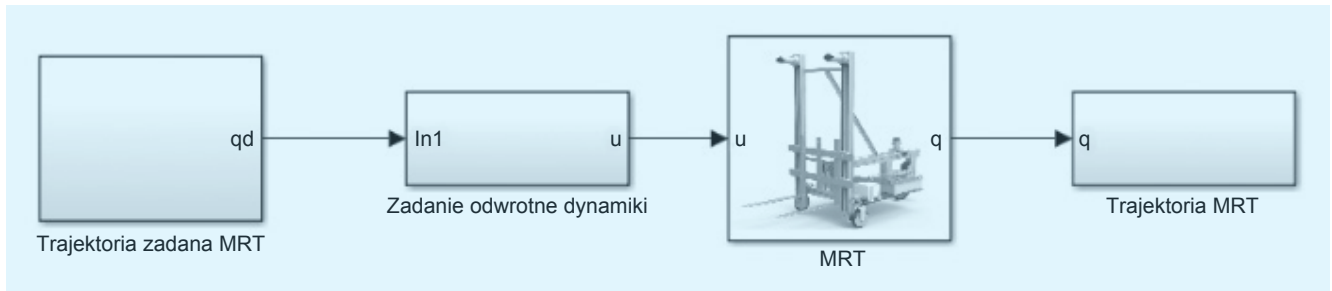
$$\begin{aligned} p_1(t) &= 0,2872 \text{ dla } t \in \langle 0; 40 \rangle \text{ oraz } t \geq 75 \text{ s} \\ p_1(t) &= 0,3512 \text{ dla } t \in \langle 40; 75 \rangle \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} p_2(t) &= 0,1195 \text{ dla } t \in \langle 0; 40 \rangle \text{ oraz } t \geq 75 \text{ s} \\ p_2(t) &= 0,1261 \text{ dla } t \in \langle 40; 75 \rangle \end{aligned} \quad (26)$$

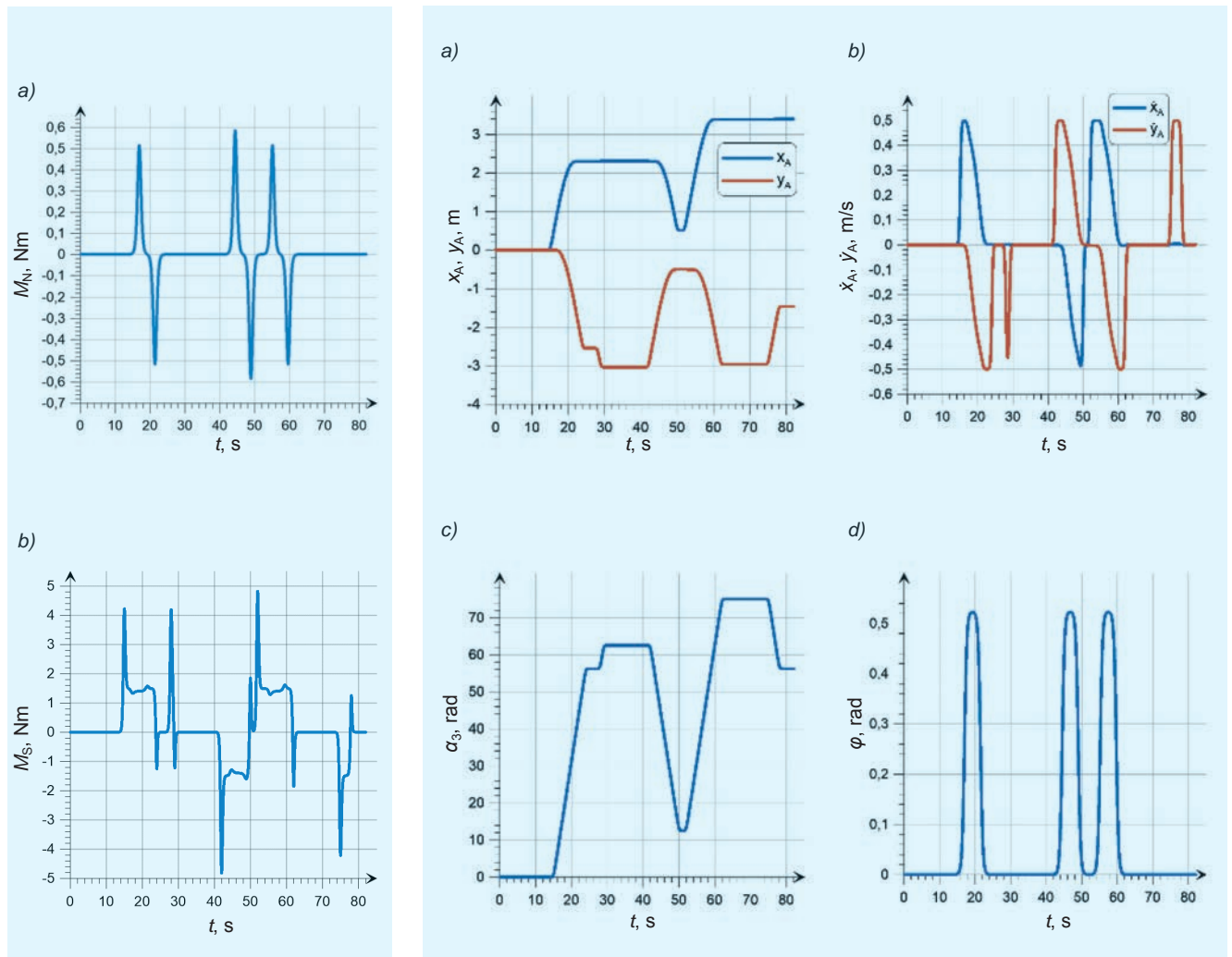
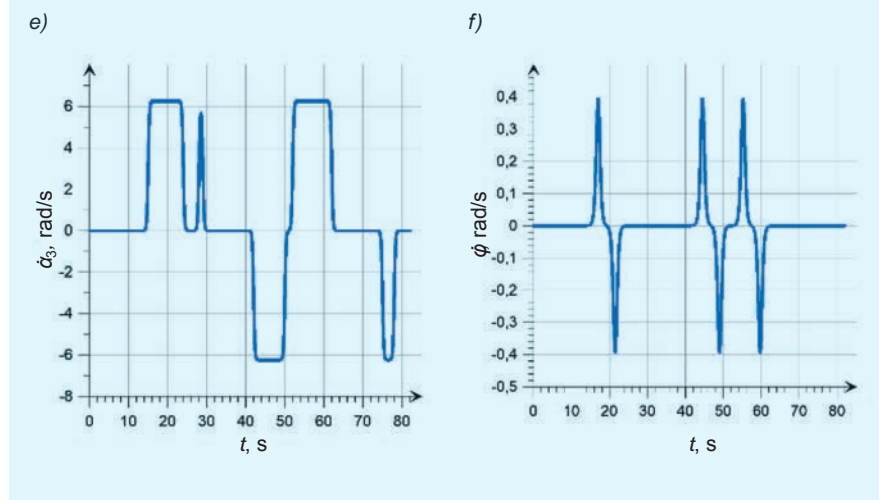
Odpowiada to realizacji zadania transportowego ładunku o masie $m_L = 10$ kg. Przebieg parametrów p_1 i p_2 w czasie przedstawiono na rys. 4 i 5.



Rys. 4. Przebiegi wartości: a) parametru p_1 , b) parametru p_2



Rys. 5. Schemat modelu zadania prostego i odwrotnego dynamiki MRT

Rys. 6. Przebiegi momentu napędowego: a) koła 3 – M_N , b) kierownicy 4 – M_S Rys. 7. Przebiegi: a) współrzędnych punktu A robota, b) rzutu wektora prędkości punktu A na osie xy , c) kąta obrotu koła napędowego α_3 , d) kąta obrotu kierownicy φ , e) wartości prędkości kątowej koła napędowego $\dot{\alpha}_3$, f) wartości prędkości kątowej kierownicy $\dot{\varphi}$ 

Wartości parametrów wzrastają, gdy robot znajduje się w punkcie P_1 danego toru ruchu, i wracają do wartości nominalnej, gdy robot znajdzie się w punkcie P_2 , co odpowiada obciążeniu podnośnika MRT masą przewożonego ładunku oraz usunięciu dodatkowego obciążenia w odpowiednich chwilach.

Na podstawie przyjętych zależności zbudowano model symulacyjny zadania odwrotnego i prostego dynamiki MRT w środowisku obliczeniowym MATLAB/SIMULINK, przedstawiony schematycznie na rys. 5.

Rozwiązanie zadania odwrotnego dynamiki pozwoliło uzyskać przebiegi wartości momentów napędzających M_N i M_S , niezbędnych do realizacji zadanej trajektorii punktu A robota.

W trakcie ruchu robota z ładunkiem w czasie rozruchu i hamowania wartości momentu napędowego koła 3 są większe niż wtedy, gdy robot porusza się bez ładunku. Obliczone wartości momentów napędowych wprowadzono do zadania prostego dynamiki MRT i wyznaczono trajektorię zrealizowaną, którą porównano z trajektorią zadaną (pokazaną na rys. 3). Tor ruchu punktu A robota, otrzymany z rozwiązania zadania prostego dynamiki, jest zbliżony do zadanego toru ruchu. Na rys. 7a przedstawiono przebieg współrzędnych punktu A, a na rys. 7b – przebieg rzutów wektora prędkości punktu A na osie x i y nieruchomego układu odniesienia. Na rys. 7c–d zaprezentowano odpowiednio przebiegi kątów obrotu koła napędowego α_3 oraz kierownicy φ , natomiast na rys. 7e–f – przebiegi wartości prędkości kątowych koła napędowego $\dot{\alpha}_3$ oraz kierownicy $\dot{\varphi}$.

Wnioski

W pracy dokonano syntezy modelu dynamiki MRT dzięki wyznaczeniu dynamicznych równań ruchu układu z więzami nieholonomicznymi, które umożliwiają rozwiązanie zadania prostego i odwrotnego dynamiki bez konieczności wyznaczania wartości mnożników Lagrange'a. Przeprowadzono ocenę parametrów modelu dynamiki MRT na podstawie badań eksperymentalnych i analizy modeli CAD robota. Wyznaczone parametry wykorzystano w symulacji zadania prostego i odwrotnego dynamiki.

Zaprezentowany model dynamiki MRT pozwoli na syntezę algorytmów sterowania ruchem nadajnym robota oraz na symulację jego ruchu w zmiennych warunkach pracy.

LITERATURA

1. Domorecki A., Krykowski K. „Silniki BLDC – Klasyczne metody sterowania”. *Zeszyty Problematyczne. Maszyny Elektryczne*. 72 (2005): s. 155–159.
2. Trojnecki M. „Mobilne roboty lądowe w transporcie”. *Logistyka*. 4 (2015): s. 6273–6283.
3. Giergiel M.J., Hendzel Z., Żylski W. „Modelowanie i sterowanie mobilnych robotów kołowych”. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2013.
4. Żylski W., Gierlak P. „Sterowanie ruchem nadajnym robotów manipulacyjnych”. Rzeszów: Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, 2008.
5. Żylski W. „Kinematyka i dynamika mobilnych robotów kołowych”. Rzeszów: Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, 1996.
6. Żylski W. „Opis ruchu 3-kołowego mobilnego robota”. *Materiały XV Ogólnopolskiej Konferencji Naukowo-Dydaktycznej Teorii Maszyn i Mechanizmów*, Białystok–Białowieża 1996, s. 489.
7. Hendzel Z. „Sterowanie ruchem nadajnym mobilnych robotów kołowych”. Rzeszów: Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, 1996.
8. Spong M.W., Vidyasagar M. „Dynamika i sterowanie robotów”. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 1997.
9. Szuster M., Obal P. „Kinematyka mobilnego robota transportowego”. *Przegląd Mechaniczny*. 2 (2017): s. 24–28. ■